AKURASI SOLUSI NUMERIK PADA PERSAMAAN GELOMBANG BERDIMENSI-SATU

Oleh :
Hery Andi Sitompul [1)]
Enzo W. B. Siahaan [2)]
Universitas Darma Agung, Medan [1,2)]
E-mail:
herystpl@gmail.com [1)]
Enzo.battra84@gmail.com [2)]

ABSTRACT

Partial differential equations are a very popular branch of mathematics that used by scientists to engineer modeling case of physical phenomena around us. Not all of these phenomena if it has been modeled in a partial differential equation can determine the exact solution, then a numerical method is needed to approximate the exact solution, one of which is Central Finite Difference. In the case examples in this study, it was found that the Central Finite Difference method has solution with good accuracy and good stability in approximating exact solutions.

Key Word : PDE, Finite Difference,MAPE,Stability

ABSTRAK

Persamaan diferensail parsial merupakan cabang ilmu matematika yang sangat populer digunakan oleh para ilmuwan untuk melakukan rekayasa pemodelan kasus fenomena fisik yang ada di sekitar kita. Tidak semua fenomena tersebut jika sudah dimodelkan dalam suatu persamaan diferensial parsial dapat ditentukan solusi eksaknya, maka dibutuhkan suatu metode numerik untuk mengaproksimasi solusi eksak tersebut, salah satunya adalah Beda Hingga Pusat. Dalam contoh kasus yang ada dalam kajian ini diperoleh bahwa metode Beda Hingga Pusat mempunyai keakuratan dan kestabilan solusi yang baik dalam mengaproksimasi solusi eksak.

Kata Kunci : P**DP, Beda Hingga, MAPE, Kestabilan.**

1. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Persamaan diferensial adalah salah satu cabang ilmu matematika yang sangat banyak digunakan para ilmuwan dan peneliti untuk memecahkan fenomena – fenomena fisik maupun kimia yang terdapat disekitar kita atau dalam kehidupan sehari – hari, oleh karena itu persamaan diferensial mempunyai peranan yang sangat penting untuk memodelkan masalah fenomena tersebut dan mendapatkan solusinya. Pada umumnya pemodelan suatu peristiwa atau fenomena fisik dilakukan berdasarkan sifat – sifat fisik fenomena tersebut, dalam hal ini model matematika yang dimaksud adalah sebuah persamaan diferensial baik itu dalam bentuk persamaan diferensial biasa atau persamaan diferensial parsial.

Persamaan matematika yang disebut diatas apakah dalam bentuk persamaan diferensial biasa atau parsial solusinya dapat ditentukan secara analitik maupun numerik. Solusi analitik merupakan fungsi kontiniu sehingga solusi untuk nilai variabel bebas dapat ditentukan dan sangat akurat, sedangkan solusi numerik dapat diperoleh pada titik – titik terpisah dan merupakan sebuah proses aproksimasi sehingga tingkat keakuratannya harus dikendalikan atau nilai galatnya dioptimalkan. Pada banyak kasus, solusi analitik dari sebuah model matematika tersebuat sangatlah sulit untuk diperoleh sehingga metode numerik sangatlah populer digunakan para peneliti untuk memenetukan solusi dari fenomena tersebut. Oleh karena metode numerik menggunakan prinsip aproksimasi, tentu saja akan terdapat jarak atau selisih dari solusi numerik dengan solusi eksaknya. Berdasarkan hal ini, maka dalam tulisan ini akan dicoba untuk membahas tingkat akurasi dari metode numerik yang ada jika digunakan pada kasus persamaan gelombang.

1.2. Maksud dan Tujuan

Maksud dari tulisan ini adalah untuk melakukan sebuah kajian apakah solusi numerik dari sebuah persamaan diferensial parsial (PDP) dalam hal ini kasusnya adalah persamaan gelombang, sejauh mana tingkat akurasinya untuk mendekati solusi analitik. Sedangkan tujuan dari tulisan ini adalah :

1. Melakukan perhitungan secara metode numerik (dalam hal ini adalah metode beda hingga) persamaan gelombang.
2. Membanding hasil yang diperoleh dari perhitungan numerik tersebut diatas.
3. Mendapatkan solusi numerik dari persamaan gelombang yang lebih baik atau optimal.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Persamaan Diferensial Parsial (PDP)

Persamaan yang memuat satu atau lebih fungsi (variabel tak bebas) dan fungsi turunannya terhadap satu atau lebih variabel bebasnya disebut dengan persamaan diferensial. Secara umum persamaan diferensial dibagi dua, yakni persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat sebuah fungsi dengan satu variabel bebas dan turunan fungsi tersebut terhadap variabel bebsanya. Bentuk umumnya adalah :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Persamaan diferensial parsial adalah adalah persamaan yang di dalamnya terdapat suku-suku diferensial parsial, yang dalam matematika diartikan sebagai suatu hubungan yang mengaitkan suatu fungsi yang tidak diketahui, yang merupakan fungsi dari beberapa variabel bebas, dengan turunan-turunannya melalui variabel-variabel yang dimaksud. Bentuk umumnya adalah :

$$a\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)+b\frac{\partial^2}{\partial xy}f(x,y)+c\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)=G(x,y)$$

Dan dapat digolongkan menjadi :

- Persamaan diferensial parsial Hiperbolik jika : $b^2-4ac>0$
- Persamaan diferensial parsial Parabolik jika : $b^2-4ac=0$
- Persamaan diferensial parsial Eliptik jika : $b^2-4ac<0$

Dalam persamaan diferensial parsial, terdapat beberapa persamaan yang sangat penting yaitu :

- Persamaan Gelombang Dimensi satu : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- Persamaan Panas Dimensi satu : $\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- Persamaan Poisson Dimensi dua : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$
- Persamaan Laplace Dimensi tiga : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

Dalam hal ini c adalah konstanta, x,y,z adalah koordinat kartesius, dan t menyatakan waktu.

2.2. Persamaan Gelombang

Misalkan sebuah gelombang dihasilkan oleh vibrasi sebuah dawai elastis yang diregangkan sepanjang L, dimana kedua ujung dawai tersebut terikat. Kemudian dawai tersebut ditarik atau diganggu dan dilepaskan pada saat $t=0$, permasalahan disini adalah menentukan simpangan gelombang $u(x,t)$ pada saat waktu t dan disebarang titik x. Bila menurunkan suatu persamaan diferensial yang bersumber pada suatu masalah fiska tertentu, biasanya kita harus menyederhanakan asumsi-asumsi untuk menjamin agar persamaan yang dihasilkan tidak menjadi terlalu rumit. Pada kasus kita sekarang ini, kita memberlakukan asumsi-asumsi berikut :

- panjang adaah konstan (”dawai homogen”) Dawainya elastis sempurna dan tidak memberikan perlawanan terhadap pelengkungan
- Tegangan yang disebabkan oleh peregangan dawai itu sebelum pengikatan kedua ujungnya lebih besar diandingkan dengan gaya gravitasi, sehingga yang terakhir ini dapat diabaikan
- Dawai itu mengalami gerak tranversal melintang) kecil pada suatu bidang vertikal; artinya, setiap partikel dawai itu bergerak secara vertikal dengan defleksi (penyimpangan) dan kemiringan di setiap titik dawai tetap kecil nilai mutlaknya

Berdasarkan asumsi – asumsi diatas maka diperoleh persamaan gelombang dimensi satu berikut : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Untuk pembentukan model persamaan gelombang ini dapat dilihat dari daftar pusataka [2].

2.3. Solusi Persamaan Diferensial Parsial

Solusi persamaan diferensial secara umum adalah sebuah fungsi $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ yang memenuhi persamaan diferensial tersebut jika diturunkan sesuai variabel bebasnya. Solusi ini disebut dengan solusi eksak. Sejauh ini belum ada metode tunggal untuk mencari penyelesaian dari suatu persamaan diferensial parsial. Bahkan beberapa jenis persamaan diferensial parsial masih belum ditemukan metode untuk mencari penyelesaiannya. Untuk dapat menyelesaikan suatu persamaan diferensial parsial, terlebih dahulu perlu mengidentifikasi jenis dari persamaan tersebut. Jenis yang dimaksud adalah kelinieran dan homogenitas dari persamaan diferensial parsial tersebut. Secara umum penyelesaian eksak dapat dilakukan dengan cara pemisahan variabel ,integral langsung dan metode pemisalan. Seperti yang sudah disebutkan sebelumya bahwa solusi eksak dari persamaan diferensial parsial terkadang sangat susah diperoleh sehingga metode numerik sangat perlu digunakan untuk mendekati solusi persamaan diferensial parsial tersebut.

2.3.1. Solusi Numerik PDP

Solusi numerik PDP adalah angka – angka hasil perhitungan berdasarkan metode numerik yang ada dalam mendekati solusi analitik/eksak dari sebuah PDP. Pada umumnya perhitungan solusi numerik dilakukan secara komputasi. Metode beda hingga adalah cara yang paling populer untuk mendekati solusi PDP. Terdapat tiga bentuk model beda hingga, yaitu :

- Beda Hingga Maju
- Beda Hingga Mundur
- Beda Hingga Terpusat

Metode beda hingga bekerja dengan merubah daerah variabel bebas menjadi grid

berhingga yang disebut mesh dimana variabel dependen diaproksimasi. Berikut diberikan konstruksi dari penurunan formula beda hingga. Misalkan U adalah fungsi bergantung pada x dan t . Dengan menggunakan formula Taylor, akan dikonstruksi turunan parsial U terhadap x

$$U(t, x_0 + \Delta x) = U(t, x_0) + \Delta x U_x(t, x_0) + \frac{\Delta x^2}{2!} U_{xx}(t, x_0) + \cdots + \frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!} U_{n-1}(t, x_0) + \mathcal{O}(\Delta x^n)$$

Dengan mempersingkat persamaan diatas pada $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ diperoleh :

$$U(t, x_0 + \Delta x) = U(t, x_0) + \Delta x U_x(t, x_0) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

$$U_x(t, x_0) = \frac{U(t, x_0 + \Delta x) - U(t, x_0)}{\Delta x} - \mathcal{O}(\Delta x^2$$

Dalam skema numerik, maka variabel x dipartisi menajadi diskrit yang disebut dengan grid : $x_0 . x_1, x_{2,...,} x_n$ dan t dipartisi menjadi : : $t_0 . t_1, t_{2,...,} t_m$.

Beda Hingga Maju

Jika diasumsikan bahwa Δx adalah kosntan dan $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ dapat diperoleh :

$$U_x(t_n, x_i) = \frac{U(t_n, x_{i+1}) - U(t_n, x_i)}{\Delta x} - O(\Delta x^2)$$

Dengan mengabaikan $O(\Delta x^2)$ sebagai galat maka diperoleh :

$U_x(t_n, x_i) = \frac{U(t_n, x_{i+1}) - U(t_n, x_i)}{\Delta x}$ bentuk persamaan ini disebut dengan beda hingga maju orde 1.

Beda Hingga Mundur

Jika Δx diganti dengan $-\Delta x$ pada persamaan :

$$U_x(t, x_0) = \frac{U(t, x_0 + \Delta x) - U(t, x_0)}{\Delta x} - O(\Delta x^2$$

Maka diperoleh :

$$U_x(t, x_0) = \frac{U(t, x_0) - U(t, x_0 - \Delta x)}{\Delta x} - O(\Delta x^2)$$

Dengan mengevaluasi pada titik (t_n, x_i) diperoleh :

$$U_x(t_n, x_i) = \frac{U(t_n, x_i) - U(t_n, x_{i-1})}{\Delta x}$$

Bentuk ini disebut dengan beda hingga mundur orde 1.

Beda Hingga Terpusat

Dengan melakukan ekspansi deret Taylor diatas samapai $O(\Delta x^3)$ dengan menggunakan Δx dan $-\Delta x$ dan mengavaluasinya pada (t_n, x_i) diperoleh :

$$U_x(t_n, x_i) = \frac{U(t_n, x_{i+1}) - U(t_n, x_{i-1})}{2\Delta x}$$

Bentuk ini disebut dengan beda hingga terpusat orde 2.

2.3. *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE)

Mean Absolute Percentage Error (MAPE) merupakan salah satu ukuran kebaikan atau akurasi dari sebuah model aproksimasi, dimana perbedaan antara nilai aproksimasi dan nilai sebenarnya dihitung dalam bentuk nilai mutlak dan dijadikan dalam nilai persentase terhadap nilai sebenarnya, jika nilai MAPE dibawah 10% maka kinerja model sangat bagus dan bila nilai MAPE antara 10% dan 20% kinerja model dikatakan bagus. Nilai MAPE dapat ditentukan dengan :

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \left\| \frac{Y_t - \hat{Y}_t}{Y_t} \right\| \times 100\%$$

Dimana : Y_t adalah solusi eksak dan $\hat{Y}_t$ adalah solusi numerik.

2.4. Kestabilan Solusi Numerik

Penerapan suatu metode numerik pada sebuah persamaan PDP belum tentu menghasilkan solusi yang sama dengan solusi analitik/eksaknya. Oleh karena itu perlu dilihat kestabilan dari solusi numerik tersebut. Uji kestabilan Von-Neumann salah satu cara menguji kestabilan metode beda hingga pada PDP, syarat kestabilan Von-Neumann adalah :

$$U_m^n = \alpha^n e^{i\beta m}$$

Solusi numerik persamaan diferensial parsial satu dimensi akan stabil jika $\|\epsilon\| \leq 1$

3. METODE PELAKSANAAN

Tahapan kerja yang dilakukan dalam tulisan ini akan dimulai dengan mengambil sebuah contoh kasus persamaan gelombang satu dimensi, kemudian menentukan solusi eksak atau analitiknya. Selanjutnya solusi numerik akan diperoleh melalui metode beda hingga, dilanjutkan dengan menguji akurasi dan kestabilan solusi numerik tersebut dan membandingkanya dengan solusi eksak.

Diberikan persamaan gelombang satu dimensi sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0$$

Dengan syarat batas dan kondisi awal :

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$$

$$u(x,0) = f(x), u_t(x,t) = 0$$

Solusi analitik/eksak dari kasus diatas dengan metode pemisahan variabel adalah :

Misalkan $u(x,t) = X(x)T(t)$, kemudian persamaan umum gelombang diatas dibagi dengan $XT/_{c^2}$ dan diperoleh persamaan baru :

$\frac{c^2}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = k^2$, *k* adalah konstanta.

Sehingga diperoleh 2 persamaan diferensial biasa :

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{k^2}{c^2}X = 0$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} + k^2T = 0$$

Dimana solusinya adalah :

$$X(x) = A\sin(nx) + B\cos(nx)$$

$$T(t) = C\sin(kt) + D\cos(kt)$$

Maka solusi PDP sementara adalah :

$$u(x,t) = X(x)T(t) = \left(A\sin(nx) + B\cos(nx)\right)\left(C\sin(kx) + D\cos(kx)\right)$$

Selanjutnya diterapkan kondisi awal dan syarat awal secara umum, maka :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Bk\sin(nx)\cos(kt) - Bk\sin(nx)\sin(kt) + Ck\cos(nx)D\sin(kt) - Dk\sin(nx)\cos(kt)$$

Supaya persamaan benar maka haruslah $B = 0, C = 0$, sehingga solusi sementara adalah :

$$u(x,t) = A\sin(nx)\cos(kt) + D\cos(nx)\cos(kt)$$

Dengan menerapkan syarat batas, persamaan akan benar untuk seluruh *t* jika *D=0*, sehingga diperoleh

$$u(x,t) = A\sin(nx)\cos(kt)$$

Dan $A\sin(nl)\cos(kt) = 0$ benar untuk seluruh *t* maka haruslah : $nl = p\pi$ dengan $p = 1,2,\cdots$

Jika $k = cn = {p\pi c}/_{l}$ maka diperoleh :

$$u_n(x,t) = A_n \sin\left(\frac{p\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{pc\pi t}{l}\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{p\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{pc\pi t}{l}\right)$$

Dengan syarat awal $u(x,0) = f(x)$, maka

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{p\pi x}{l}\right)$$

Dengan menemukan deret Fourier untuk *sinusf(x)* ini, dengan $x + ct$ dan $x - ct$ pada ekspansi Fourier *sinusf(x)* maka diperoleh solusi umum PDP adalah :

$$u(x,t) = f(x + ct) + f(x - ct)$$

Contoh kasus : Diberikan persamaan gelombang dimensi satu :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \le x \le 4\pi, t > 0$$

Dengan syarat batas dan awal :

$$u(x,0) = sinxcosx$$

$$u(0,t) = 0, u(4\pi,t) = 0$$

$$u_t(x,0) = 0$$

Maka solusi eksak dari PDP diatas adalah :

$$u(x,t) = f(x + ct) + f(x - ct)$$

Dengan $f(x) = u(x,0)$ maka :

$$u(x,t) = \sin(x + ct)\cos(x + ct) + \sin(x - ct)\cos(x - ct)$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2(x + ct) + \frac{1}{2}\sin 2(x - ct)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} sin2xcos2ct$$

Solusi numerik kasus ini akan dilakukan dengan metode beda hingga.

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dengan metode beda hingga terpusat skema numeriknya adalah :

$$\frac{u_i^{j-1} + u_i^{j+1} - 2u_i^j}{\Delta t^2} = c^2 \left[\frac{u_{i-1}^j + u_{i+1}^j - 2u_i^j}{\Delta x^2}\right]$$

Atau

$$u_i^{j-1} + u_i^{j+1} - 2u_i^j = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}\left[u_{i-1}^j + u_{i+1}^j - 2u_i^j\right]$$

Dengan $\epsilon = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ maka

$$u_i^{j+1} = \epsilon^2 u_{i-1}^j + \epsilon^2 u_{i+1}^j + 2(1 - \epsilon^2)u_i^j - u_i^{j-1}$$

Misalkan $0 \le x \le 4\pi$ dipartisi sebanyak *n* maka i=1,2,...n dan $0 \le t \le T$ dipartisi sebanyak m maka *j=1,2,...,m*. Selanjutnya untuk memulai proses perhitungan secara numerik, maka syarat batas dan syarat awal diberlakukan, yaitu :

Pada saat $x = 0$ dan $x = 4\pi$ nilai amplitudo atau $u_1^j = 0$ dan $u_n^j = 0$ untuk $j = 1,2,\cdots,m$ dan pada saat $t = 0$ nilai $u_i^1 = \sin(x_i)\cos(x_i)$ untuk *i=1,2,..,n*.

Syarat kestabilan Von-Neumann :

$\|\epsilon\| \le 1$ dimana $\epsilon = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$, maka :

$c\frac{\Delta t}{\Delta x} \le 1$ akan terpenuhi jika nilai $c \le 1$ hal ini dikarenakan nilai Δx dan Δt selalu bernilai kecil untuk menjaga keakuratan hasil numerik.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan deskripsi masalah yang disebutkan pada metodologi diatas, maka proses perhitungan numerik dilakukan dengaan skema berikut :

$\Delta x = \frac{\pi}{100}$ untuk $0 \le x \le 4\pi$, dan

$\Delta t = \frac{1}{100} = 0.01$ untuk $0 \le t \le 5$

$$
\begin{array}{ccccc}
u_1^m = 0 & u_2^m & u_3^m & \cdots & u_n^m = 0 \\
\cdots & & & & \vdots \\
u_1^3 = 0 & & & & u_n^3 = 0 \\
u_1^2 = 0 & \vdots & \vdots & \vdots & u_n^2 = 0 \\
u_1^1 = 0 & u_2^1 & u_3^1 & \cdots & u_n^1 = 0
\end{array}
$$

Dimana nilai

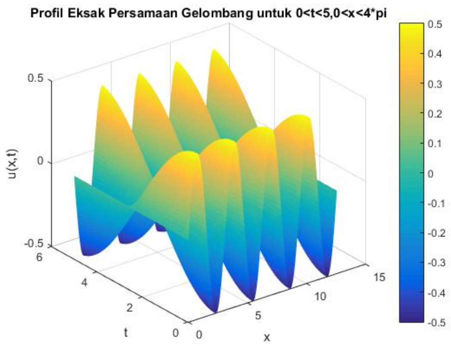
$$u_2^1 = sin(\Delta x)cos(\Delta x)$$

$$u_3^1 = sin(2\Delta x)cos(2\Delta x)$$

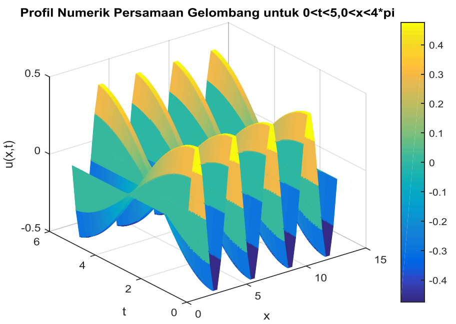
Dan seterusnya sampai u_{n-1}^1. Dengan demikian nilai u_i^j dapat ditentukan berdasarkan informasi ini, sebagai contoh nilai u_2^3 berdasarkan formulasi numeriknya adalah :

$$u_2^3 = \epsilon^2 u_1^2 + \epsilon^2 u_3^2 + 2(1-\epsilon^2)u_2^2 - u_2^1$$

Demikian seterusnya sampai seluruh grid dihitung. Seluruh perhitungan ini dilakukan secara komputasi dengan bantuan pemograman Matlab dimana hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut :

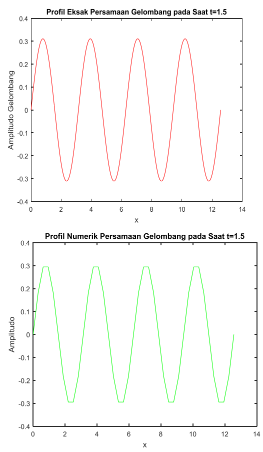


Gambar 1. Plot Solusi Eksak Persamaan Gelombang

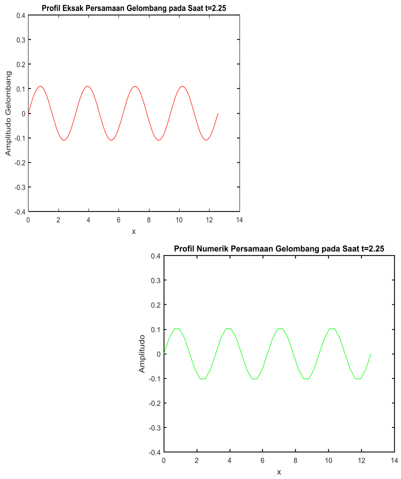


Gambar 2. Plot Solusi Eksak Persamaan Gelombang

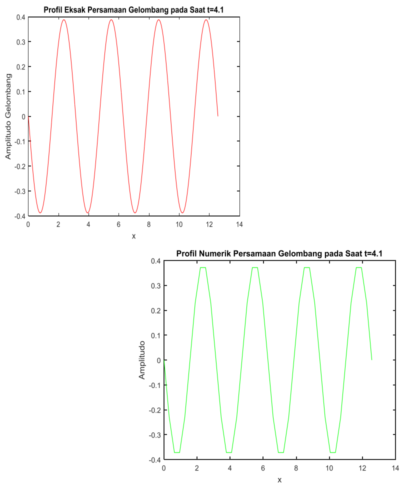
Terlihat dari kedua gambar tersebut, secara umum nyaris tidak ada perbedaan yang berarti. Perbedaan hanya pada tingkat kemulusan grafik karena pada proses numerik bidang untuk solusi didekati dengan grid – grid dan bersifat diskrit atau tidak kontiniu sedangkan solusi eksaknya bersifat kontiniu. Untuk memperjelas perbandingan hasil numerik dan eksak berikut ini akan disajikan profil gelombang pada saat *t* tertentu.



Gambar 3. Profil Eksak dan Numerik pada saat t=1.5



Gambar 4. Profil Eksak dan Numerik pada saat t=2.25

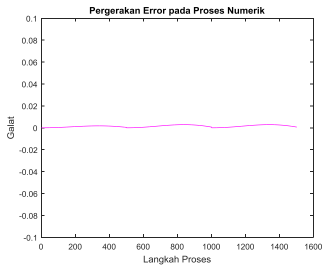


Gambar 5. Profil Eksak dan Numerik pada saat t=4.1

Pada saat *t=1.5* nyaris tidak ada perbedaan antara solusi eksak dan solusi numerik, tetapi pada saat *t=2.25* dan *t=4.1* dapat dilihat ada perbedaan yang sangat kecil.

Selain analisis berdasarkan perbandingan plot hasil numerik dan eksak, keakuratan solusi numerik dapat diuji dengan MAPE, dimana seluruh hasil perhitungan numerik pada saat *t* dan *x* yang berseuaian dengan solusi eksak dilakukan perhitungan rata – rata galat absolut. Sebagai contoh nilai u_5^4 pada perhitungan numerik bersesauin dengan dilai $u(x,t)$ pada saat $x = 0.04\pi$ dan saat $t = 0.03$. Dari hasil perhitungan komputasi diperoleh nilai *MAPE = 2.8650%* yang artinya proses perhitungan distiap grid menghasilkan galat/kesalahan rat – rata absolut sebesar 2.850% dan menurut literatur diatas maka metode ini sangantlah akurat.

Suatu metode numerik dikatakan stabil jika galat yang dihasilkan /terjadi pada suatu langkah proses tidak cenderung membesar pada proses langkah – langkah berikutnya. Dari hasil perhitungan komputasi diperoleh plot galat dalam setiap perhitungan berikut :



Gambar 6. Kestabilan dari Proses Numerik

Dapat dilihat dari gambar diatas bahwa peregerakan galat dalam setiap proses adalah stabil atau tidak cenderung membesar pada langkah – langkah berikutnya. Tingkat kestabilan diperoleh pada saat nilai $c = 0.5$.

5. SIMPULAN

Setelah melakukan pembahasan dan mendapatkan hasil dari kasus persamaan diferensial parsial yaitu persamaan gelombang satu dimensi dengan kondisi yang dideskripsikan dalam contoh kasus tersebut diatas, maka dapat ditarik kesimpulan.

1. Metode beda hingga dalam hal ini metode beda hingga pusat orde 2 dapat mengaproksimasi solusi eksak dengan baik.
2. Tingkat keakuratan metode hingga beda pusat sangat baik yaitu sebesar 2.860% rata – rata galat absolut.
3. Metode beda hingga pusat orde 2 mempunyai kestabilan yang baik.

Saran

Karena kestabilan metode beda hingga pusat orde 2 tergantung pada syarat $c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$, maka perlu dilakukan perhitungan komputasi berulang – ulang dengan mengganti nilai $c$untuk mendapatkan hasil yang baik. Hal ini disebabkan oleh nilai Δx dan Δt biasanya selalu ditentukan.

6. DAFTAR PUSTAKA

Brian R. Hunt, Ronald L. Lipsman and Jonathan M. Rosenberg (2001), *A Guide to Matlab for Beginners and Experinced User*. Cambridge University Press.

David L. Powers (2006), *Boundary Problems and Partial Differential Equation ,Fifth Edition.* Elsevier Academic Press.

Erwin Kreyszig (2001), *Advance Engineering Mathematics, 8th Edition.* John Wiley & Sons, Inc. New York.

Jaan Kiusalaas (2005), *Numerical Methods in Engineering with Matlab*. Cambridge University Press.

John C. Strikwerda (2004), *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equation,Second Edition.* Soceity for Industrial and Applied Mathematics. Philadelpia.

Mark A. Pinsky (2003),*Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Aplication, Third Edition*. American Mathematical Society. Rhode Island.