Jurnal Penelitian Fisikawan
Volume: 7, Nomor: 1, (2024), Februari 32– 40
https://jurnal.darmaagung.ac.id/index.php/jurnalpenelitianfisikawan
P-ISSN:2621-8461
E-ISSN:2655-738X

SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE TINGGI DENGAN METODE POLINOMIAL DAN RUNGE KUTTA

Oleh:
Hery Andi Sitompul [1], Enzo W. B. Siahaan [2]
Universitas Darma Agung, Medan
E-mail:
herystpl@gmail.com [1], *Enzo.battra84@gmail.com* [2]

ABSTRACT

Discussions regarding numerical solutions of higher order ordinary differential equations are still rarely discussed by scientists. The most popular method for determining the numerical solution of a high order ordinary differential equation is the Runge Kutta method, so in this paper we will discuss the polynomial approximation method for determining the solution of a high order differential equation comparing it with the Runge Kutta method for exact values. It was found that the polynomial method can approach the exact value very well which can be seen from the Mean absolute percentage error value in the two cases given, namely 0.0746% in the first case and 0.1460% in the second case. Meanwhile, the Runge Kutta method is 0.5045% in the first case and 5.3066% in the second case.

Key Word : Polynomial, Runge Kutta, Numeric, Differential Equation

ABSTRAK

Pembahasan mengenai solusi numerik dari persamaan diferensial biasa orde tinggi masih tergolong jarang dibahas oleh para ilmuwan. Metode yang paling populer untuk menentukan solusi numerik dari persamaan diferensial biasa orde tinggi adalah metode Runge Kutta, maka dalam tulisan ini akan dibahas metode pendekatan polinomial untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial orde tinggi membandingkannya dengan metode Runge Kutta terhadap nilai eksak. Diperoleh bahwa metode polinomial dapat menghampiri nilai eksak dengan sangat baik yang dapat dilihat dari nilai persentase rata – rata galat mutlak pada dua kasus yang diberikan yaitu 0.0746% pada kasus pertama dan 0.1460% pada kasus kedua. Sedangkan pada metode runge Kutta 0.5045% pada kass pertama dan 5.3066% pada kasus kedua.

Kata Kunci: **Polinomial , Runge Kutta, Numerik , Persamaan Diferensial**

1. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Persamaan diferensial biasa mempunyai peranaan yang sangat penting dalam matematika, berbagai fenomena fisika pada ummnya dimodelkan melalui persamaan diferensial baik itu persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial. Sebagai contoh, masalah aliran fluida dan panas, vibrasi, pergerakan sebuah objek, reaksi kimia atau nuklir.

Berbagai aplikasi dari berbagai tipe persamaan diferensial akan sangat banyak ditemukan dalam kehidupan kita sehari – hari, khususnya persamaan diferensial biasa dari berbagai orde. Sebagai contoh persamaan diferensial biasa orde 4 banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah dinamika fluida, mekanika, kimia kuantum dan lain – lain. Tetapi

History:
Received : 25 Desember 2023
Revised : 10 Januari 2023
Accepted : 23 Januari 2023
Published: 5 Februari 2023

Publisher: LPPM Universitas Darma Agung

pada umumnya solusi model matematika dari aplikasi tersebut dilakukan dengan metode pendekatan atau numerik. Hal ini membuat para ilmuwan terus menerus melakukan kajian mengenai solusi nmerik untuk persamaan difernsial biasa. Sebagai contoh metode Runge Kutta sudah sangat dikenal luas untuk solusi numerik persamaan difernsial biasa orde satu, tetapi untuk orde yang lebih tinggi belum dikaji seluas orde satu.

Dalam tulisan ini akan diberikan kajian mengenai solusi numerik dari sebuah persamaan diferensial biasa orde tinggi.

1.2. Maksud dan Tujuan

Makalah atau tulisan ini dimaksudkan untuk melakukan kajian untuk solusi numerik persamaan diferensial biasa orde tinggi dengan metode polinomial dan Runge Kutta . Adapun tujuan dari tulisan ini adalah :

1. Mendapatkan solusi numerik dari persamaan diferensial biasa orde tinggi dengan metode polinomial.
2. Mendapatkan solusi numerik dari sebuah persamaan diferensial biasa orde tinggi dengan metode Runge Kutta.
3. Melakukan perbandingan hasil antara metode polinomial dengan metode Runge Kutta. Membandingkan hasil dari kedua metode tersebut dengan solusi eksak atau analitiknya.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Persamaan Diferensail Biasa Orde Tinggi

Bentuk umum persamaan diferensial biasa orde tinggi :

Misalkan $y^{(n)}(t)=\frac{d^n y}{dt^n}$ dimana $y(t)$ adalah solusi dari persamaan diferensial : $y^n(t)=f\left(t,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)}\right)$

Dengan nilai awal :

$y(0)=\alpha_0\,,y'(0)=\alpha_1,y''(0)=\alpha_2,\dots,y^{(n-1)}(0)=\alpha_{n-1}$

2.2.Metode Polinomial

Bentuk umum dari sebuah fungsi polinomial orde n adalah :

$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$

Dengan turunannya :

$P'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}$

$P''(x)=2.1a_2+3.2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}$

$P'''(x)=3.2.1a_3+4.3.2.1a_4+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$

Hingga turunan orde m adalah :

$$P^{(m)}(x)=m.(m-1).\cdots.2.1a_m+(m+1)m..\cdots.2.1a_{m+1}x+\cdots$$
$$+n(n-1).\cdots.\big(n-(m-1)\big)a_nx^{n-m}$$

2.3.Metode Runge Kutta

Metode Runge Kutta merupakan sebuah metode prediksi dan koreksi untuk aproksimasi solusi persamaan biasa yang sangat terkenal di kalangan para ilmuwan. Metode ini dikembangkan oleh ahli matematika Jerman yaitu C.Runge dan M.W.Kutta.

Misalkan sebuah persamaan diferensial biasa : $y'(t)=f(t,y(t))$ dengan nilai awal $y(0)=y_0$ secara numerik akan dihampiri solusi persamaan diferensial $y(t)$ pada selang $a\le t\le b$. Dengan membagi interval menjadi N subinterval hingga $t_i=a+hi,i=0,1,\cdots,N$

dimana $h = \frac{b-a}{N}$ yang disebut dengan ukuran langkah. Keluarga dari metode Runge Kutta untuk tahap m secara ekplisit dinyatakan dengan :

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\sum_{i=1}^{m} c_i k_i$$

Dimana :

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$
$$k_2 = hf\big(t_n + \alpha_2 h, y_n + h\beta_{21}k_1(t_n, y_n)\big)$$
$$k_3 = hf\left(t_n + \alpha_3 h, y_n + h\big(\beta_{31}k_1(t_n, y_n) + \beta_{32}(t_n, y_n)\big)\right)$$

Dalam bentuk lebih umum :

$$k_m = hf\left(t_n + \alpha_m h, y_n + h\sum_{i=1}^{m}\beta_{mi}k_i\right)$$

Salah satu orde yang paling terkenal dari Runge Kutta adalah orde 4 ($m = 4$) yaitu :

$$y(0) = y_0$$
$$k_1 = hf(t_i, y_i)$$
$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = hf(t_{i+}, y_i + k_3)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[k_1] + 2k_2 + 3k_3 + k_4$$

untuk setiap $i = 0.1,2,\cdots,N-1$

3. METODE PENELITIAN

Solusi numerik dari sebuah persamaan diferensial orde k dengan metode polinomial akan dilakukan dengan tahapan berikut :

Misalkan bentuk persamaan diferensial adalah :

$$y^{(k)}(t) + f_1(t)y^{(k-1)}(t) +$$
$$f_2(t)y^{(k-2)}(t) + \cdots + f_{k-2}(t)y'(t) +$$
$$f_{k-1}(t)y(t) = Q(t) \cdots\cdots\cdots (*)$$

untuk $a \le t \le b$

Dengan nilai awal : $y^{(k-1)}(a) = c_k, y^{(k-2)}(a) = c_{k-1}, \ldots, y'(a) = c_1, y(a) = c_0$. Bentuk sebuah polinomial berderajat m, $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$.

Untuk mendapatkan solusi numerik persamaan diferensial biasa orde $k > 1$ dilakukan berdasarkan tahapan berikut :

1. Turunkan polinomial $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$, hingga orde k
2. Bagi interval $a \le t \le b$ menjadi N subinterval dengan $h = \frac{b-a}{N}$,ambil sebuah subinterval $[t_0, t_1]$ dan kembali bagi menjadi m subinterval dengan $h_a = \frac{h}{m}$, sedemikian hingga $t_0 < t_{11} < t_{12} < \cdots < t_m = t_1$
3. Substitusi persamaan polinomial dan turunannya yang didapat pada langkah 1 pada persamaan diferensial (*).

4. Substitusi nilai $t_0, t_{11}, t_{12}, \cdots, t_m$ pada persamaan yang diperoleh pada langkah 3, sehingga diperoleh $m+1$ persamaan dan $m+1$ koefisien yang tak diketahui. Dengan metode eleminasi Gauss atau metode invers maka akan diperoleh nilai $a_0, a_1, \cdots, a_m$.
5. Substitusi nilai $a_0, a_1, \cdots, a_m$ pada polinomoial dan gunakan untuk menghampiri nilai $y(t)$ pada $t = t_1$ hingga $t_n = b$.

Solusi numerik dengan metode Runge Kutta pada persamaan diferensial orde k dilakukan dengan tahapan berikut :

1. Transformasi persamaan diferensial orde k menjadi k sistem persamaan diferensial orde satu, misalkan
$u_1(t) = y(t)$,
$u_1'(t) = u_2(t), u_2'(t) =$
$u_3(t), \cdots, u_{k-1}'(t) = u_k(t)$

2. Gunakan algoritma Runge Kutta orde 4 untuk setiap persamaan diferensial tersebut yaitu :
$u_1(a) = c_0, u_2(a) =$
$c_1, \cdots, u_{k-1}(a) = c_k$

$$k_{1j} = hf_j(t, u_1, u_2, \cdots, u_k)$$
$$k_{2j} = hf_j\left(t + \frac{h}{2}, u_1 + \frac{1}{2}k_{11}, u_2 + \frac{1}{2}u_{12}, \cdots, u_k + \frac{1}{2}k_{1k}\right)$$
$$k_{3j} = hf_j\left(t + \frac{h}{2}, u_1 + \frac{1}{2}k_{21}, u_2 + \frac{1}{2}u_{22}, \cdots, u_k + \frac{1}{2}k_{2k}\right)$$
$$k_{4j} = hf_j(t + h, u_1 + k_{13}, u_2 + u_{32}, \cdots, u_k + k_{3k})$$
$$u_{j,i+1} = u_{j,i} + \frac{1}{6}[k_{1j} + 2k_{2j} + 3k_{3j} + k_{4j}]$$

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Akan disajikan 2 contoh kasus dalam tulisan ini untuk menunjukkan kedua metode yang disebutkan diatas. Pada metode polinomial akan digunakan ponomial orde $m = 8$. Semua perhitungan pada kasus ini dilakukan dengan bantuan Matlab.

Contoh 1. Tentukan solusi numerik dari persamaan diferensial : $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^t, 0 \le t \le 2$ dengan nilai awal $y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 0$ dan $h = 0.1$.dimana solusi eksak adalah : $y(t) = \frac{43}{36}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{4}{9}e^{-2t} + \frac{1}{6}te^t$.

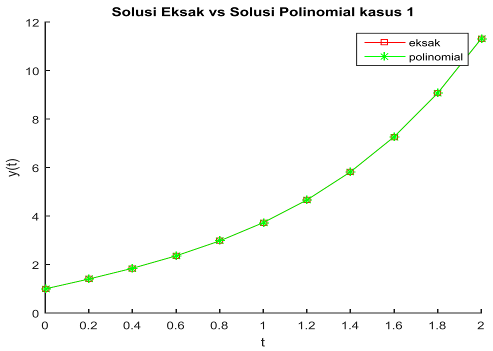
Metode Polinomial

Misalkan Polinomial $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_8t^8$ dan
$P'(t) = a_1 + 2.a_2t + 3.a_3t^2 + \cdots + 8a_8t^7$
$P''(t) = 2.a_2 + 6.a_3t + \cdots + 56a_8t^6$
$P'''(t) = 6.a_3 + 24a_4t + \cdots + 336a_8t^5$
Subinterval $[0.2,2]$ dibagi menjadi 5 subinterval baru dengan $t_0 = 0.2, t_{11} = 0.4, t_{12} = 0.6, \cdots, t_{15} = 2$

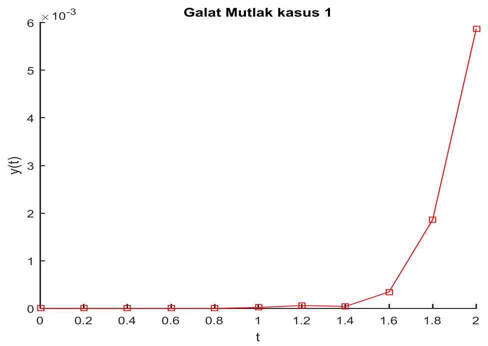
Selanjunya substitusi polinomial hingga turunan ketiganya ke persamaan diferensial dan mengikuti langkah langkah pada metodologi maka diperoleh hasil sebagai berikut :

t_i	$y_{polinomial}$	y_{eksak}	$Galat\ mutlak$
0	1.0000	1.0000	0
0.2	1.4064	1.4064	1.7×10^{-7}
0.4	1.8492	1.8492	1.05×10^{-7}
0.6	2.3620	2.3620	1.8×10^{-6}
0.8	2.9776	2.9776	1.4×10^{-6}
1.0	3.7317	3.7317	2.08×10^{-5}
1.2	4.6646	4.6647	6.0×10^{-5}
1.4	5.8245	5.8245	4.2×10^{-5}
1.6	7.2696	7.2693	0.0003
1.8	9.0719	9.0700	0.0019
2	11.3204	11.3145	0.0059

Tabel 1. Perbandingan hasil metode polinomial dengan nilai eksak contoh 1.



Gambar 1. Plot hasil metode polinomial dan nilai eksak contoh 1



Gambar 2. Plot nilai galat mutlak pada metode polinomial contoh 1.

Metode Runge Kutta.

$y''' = -2y'' + y' + 2y + e^t$

$u_1(t) = y(t)$

$u_1'(t) = u_2(t) = y'$

$u_2'(t) = u_3(t) = y''$

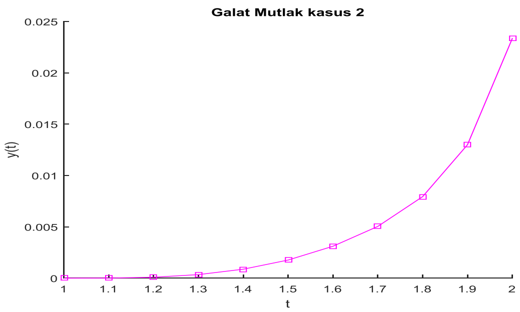
$u_3'(t) = y'''$

$u_3' = -2u_3 + u_2 + 2u_1 + e^t$

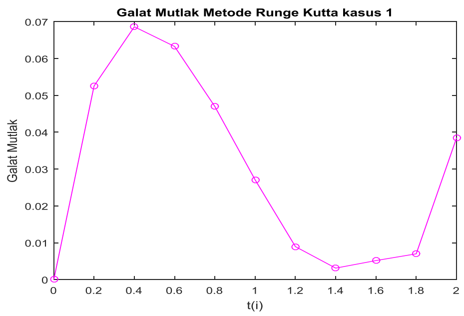
Hasil perhitngan numerik untuk persamaan diferensial diatas adalah :

t_i	y_{RK}	y_{eksak}	$Galat\ mutlak$
0	1.0000	1.0000	0
0.2	1.4589	1.4064	0.0526
0.4	1.9179	1.8492	0.0686
0.6	2.4252	2.3620	0.0633
0.8	3.0246	2.9776	0.0470
1.0	3.7588	3.7317	0.0271
1.2	4.6736	4.6647	0.0089
1.4	5.8214	5.8245	0.0031
1.6	7.2641	7.2693	0.0052
1.8	9.0770	9.0700	0.0052
2	11.3529	11.3145	0.0059

Tabel 1. Perbandingan hasil metode Runge Kutta dengan nilai eksak contoh 1.



Gambar 3. Plot hasil metode Runge Kutta dan nilai eksak contoh 1



Gambar 4. Plot nilai galat mutlak pada metode Runge Kutta contoh 1.

Contoh 2. $t^3y''' + t^2y'' - 2ty' + 2y = 8t^3 - 2, 1 \leq t \leq 2$ dengan nilai awal $y(1) = 2, y'(1) = 8, y''(1) = 6$ dan $h = 0.1$. dimana solusi eksaknya adalah : $y(t) = 2t - t^{-1} + t^2 + t^3 - 1$.

Metode Polinomial

Misalkan Polinomial $P(x) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_8t^8$ dan

$P'(t) = a_1 + 2.a_2t + 3.a_3t^2 + \cdots + 8a_8t^7$

$P''(t) = 2.a_2 + 6.a_3t + \cdots + 56a_8t^6$

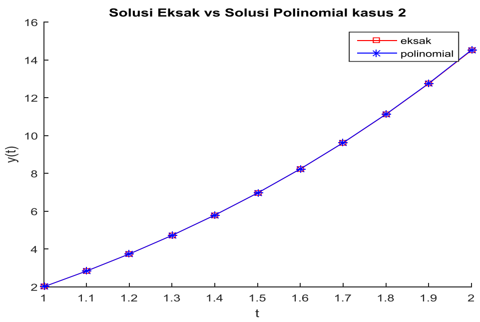
$P'''(t) = 6.a_3 + 24a_4t + \cdots + 336a_8t^5$

Subinterval $[1,1.5]$ dibagi menjadi 5 subinterval baru dengan $t_0 = 1, t_{11} = 1.1, t_{12} = 1.2, \cdots, t_{15} = 1.5$

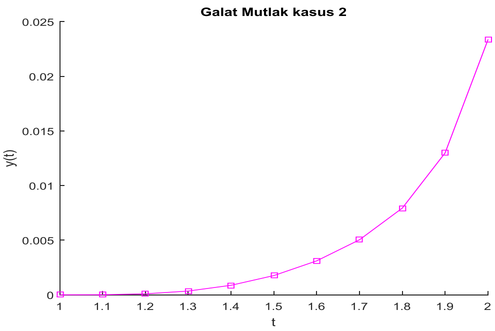
Selanjutnya substitusi polinomial hingga turunan ketiganya ke persamaan diferensial dan mengikuti langkah langkah pada metodologi maka diperoleh hasil sebagai berikut :

t_i	$y_{polinomial}$	y_{eksak}	$Galat\ mutlak$
1	2.0000	2.0000	0
0.1	2.8319	2.8319	7.6×10^{-7}
0.2	3.7347	3.7346	8.9×10^{-4}
0.3	4.7181	4.7177	3.4×10^{-4}
0.4	5.7905	5.7897	8.7×10^{-4}
1.5	6.9600	6.9583	1.7×10^{-3}
1.6	8.2341	8.2310	3.1×10^{-3}
1.7	9.6198	9.6147	5.02×10^{-3}
18	11.1243	11.1164	0.0079
1.9	12.7556	12.7426	0.0129
2	14.5233	14.5000	0.0233

Tabel 3. Perbandingan hasil metode polinomial dengan nilai eksak contoh 2.



Gambar 6. Plot hasil metode polinomial dan nilai eksak contoh 2



Gambar 6. Plot nilai galat mutlak pada metode polinomial contoh 2.

Metode Runge Kutta

$y''' = -t^{-1}y'' + 2t^{-2}y' - 2t^{-3}y + 8 - 2t^{-3}$

$u_1(t) = y(t)$

$u_1'(t) = u_2(t) = y'$

$u_2'(t) = u_3(t) = y''$

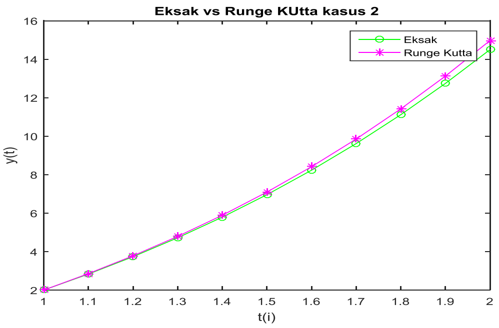
$u_3'(t) = y'''$

$u_3' = -t^{-1}u_3 + 2t^{-2}u_2 - 2t^{-3}u_1 + 8 - 2t^{-3}$

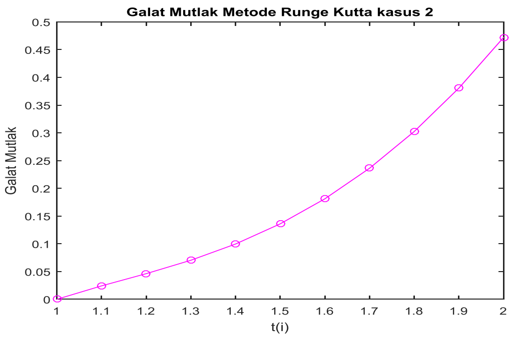
Hasil perhitngan numerik untuk persamaan diferensial diatas adalah :

t_i	y_{RK}	y_{eksak}	$Galat\ mutlak$

1	2.0000	2.0000	0
0.1	2.8561	2.8319	0.0242
0.2	3.7808	3.7346	0.0462
0.3	4.7881	4.7177	0.0704
0.4	5.8893	5.7897	0.0996
1.5	7.0943	6.9583	0.1360
1.6	8.4121	8.2310	0.1811
1.7	9.8510	9.6147	0.2362
18	11.4188	11.1164	0.3024
1.9	13.1234	12.7426	0.3807
2	14.9719	14.5000	0.4719



Gambar 7. Plot hasil metode Runge Kutta dan nilai eksak contoh 2.



Gambar 8. Plot nilai galat mutlak pada metode Runge Kutta contoh 2.

Pada contoh 1 persentase rata – rata galat mutlak (MAPE) yang dihasilkan oleh metode polinomial adalah 0.0746% sedangkan pada metode Runge Kutta adalah 0.5045% dan pada contoh 2 metode polinomial menghasilkan MAPE sebesar 0.1460% sedangkan metode Runge Kutta menghasilkan MAPE sebesar 5.3066%.

Dari kedua contoh yang dibahas pada tulisan ini terlihat bahwa metode polinomial menghasilkan MAPE yang lebih kecil dibandingkan dengan metode Runge Kutta. Kedua metode menghasilkan nilai estimasi yang sangat baik jika dilihat dari persentase rata – rata galat mutlak yang diperoleh.

Pada metode polinomial galat mutlak yang diperoleh cenderung semakin besar seiring dengan nilai t yang membesar sedangkan pada metode Runge Kutta galat nilai mutlak bergerak secara acak.

5. SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan maka dapat diambil kesimpulan :

1. Metode polinomial dan Runge Kutta menghasilkan nilai estimasi nilai eksak dari sebuah persaman diferensial biasa orde tinggi dengan sangat baik.
2. Metode polinomial menghasilkan nilai rata – rata galat mutlak yang lebih kecil jika dibandingkan dengan metode Runge Kutta.

6. DAFTAR PUSTAKA

Burden, R.L., Faires, J.D (2005). *Numerical Analysis. Boundary-Value Problems for Ordinary Differential Equations*, Belmount: Thomson Brooks/Cole

J.C. Butcher. (2008). *Numerical Method for Ordinary Differential Equation.* Second Edition, John Wiley & Sons Ltd.

Maitree Podisuk and Chinda Chaichuay. (2005). *Solving Initial Value Problem of Higher Ordinary Diferential Equations by Polynomials.* KMITL Sci.J.Vol,5.No.1.Feb.2005.

R.Shankar Subramanian. *Briefs Note for Using the Runge Kutta Method*. Departmen of Chemical and Biomolecular Engineering, Clarkson University, Postdam, New York 13699

Richard.L.Burdens and J.Douglas Faires, J.D (2011). *Numerical Analysis.ninth edition* Brooks/Cole, Cengage Learning.