OPTIMASI PEMULUSAN EKSPONENSIAL DENGAN ALGORITMA LEVENBERG-MARQUARDT

Hery Andi Sitompul, S.Si, M.Si
Dosen Kopertis Wilayah I Sumut, Dpk Universitas Darma Agung

Abstract

Determination of the value of the exponential smoothing's parameters is a very sygnificant problems, because the value of these parameters is very sensitive to changes of forecasts in demand. Commonly, the way how to find the value of these parameters is try and error method. Try and error done by updating every possilble combination of the parameter's values to exponential smoothing model thus, the results of the forecast is to be compared by each others. The best parameters is choosen by acuration measurement (minimum error),because of this method is very hard and wasting time,in this paper will propose another method how to get the best value of the smooting's parameter. Non linear programming algorithm (in this case the levenberg – marquardt algorithm) will be aplicated to exponential smoothing model. In this paper will show that this algorithm is very fit to estimated optimum value of the smoothing's parameters.

Keywords : ***Exponential Smoothing, Smoothing Parameters, Levenberg – Marquardt Algorithm, Forecasts Error***

PENDAHULUAN

LatarBelakang

Pengambilan keputusan dalam era kemajuan teknologi dan ilmu pengetahuan sekarang ini, akan selalu didasarkan atas hasil analisis dan interpretative dari sebuah data kuantitatif. Sebagai contoh, seorang pimpinan atau manager yang akan mengambil suatu keputusan yang akan digunakan kedepan akan membutuhkan suatu kajian analisis dari data kuantitatif variabel – variabel yang berkaitan dengan keputusan tersebut.

Sebuah prediksi kedepan atau peramalan adalah salah satu bentuk kajian analisis untuk mengambil sebuah keputusan, dan pemulusan eksponensial adalah salah satu metode peramalan yang sangat popular. Hal ini dikarenakan metode ini mudah untuk dipahami dan digunakan, seorang lulusan atau mahasiswa sekolah busines paling tidak pernah sekali menggunakan metode ini dalam operasional management.

Pemulusan eksponensial adalah metode peramalan yang sensitive terhadap penentuan parameter model, sebagai gambaran model pemulusan ekspoenensial ganda dua parameter dari Holt :

$$L_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)F_t$$

$$T_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)F_{t-1}$$

$$F_{t+1} = L_t + T_t$$

$$0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$$

Jikanilai α dipilih besar akan mengakibatkan ramalan menjadi sangat responsif (nilai ramalan jauh dari yang seharusnya) dan sebaliknya jika nilai α dipilih kecil akan mengakibatkan ramalan dibawah yang seharusnya, juga demikian dengan β jika dipilih besar akan mengakibatkan efek yang sama.

Sebagian besar buku teks menyediakan cara umum untuk menentukan nilai parameter tersebut, sebagai contoh Schroeder, Rungtusanatham, & Goldstein (2013) dan Jacobs & Chase (2013) menyarankan nilai α dan β berada pada kisaran 0,1 dan 0,3. Heizer& Render (2011) and Stevenson (2012) menawarkan rentang yang lebih lebar yakni antara 0,003 sampai 0.5 sedangkan Chopra & Meindl (2013) menyarankan nilainya tidak lebih dari pada 0,2.

Sebagian besar rekomendasi dari buku teks tersebut didasarkan oleh ukuran akurasi peramalan yang dilakukan dengan *Mean Absolute Deviation* (MAD), *Mean Square Error* (MSE), dan *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) yang dilakukan dengan *try and error*, yaitu dengan mencoba nilai α dan β yang mengasilkan ukuran akurasi yang terkecil.

Penentuan nilai parameter pemulusan eksponensial tanpa metode*try and error* masih sangat terbatas dikaji dalam buku teks, oleh karena itu dalam tulisan ini akan dilakukan sebuah kajian untuk menentukan nilai parameter tersebut tanpa sistem*try and error*.

Maksud dan Tujuan

Maksud dari tulisan ini adalah untuk melakukan kajian penentuan parameter pemulusan eksponensial yang optimum dengan menggunakan algoritma non linier Levenberg – Marquardt.

Sedangkan tujuan dari tulisan ini adalah :

- Mendapatkan nilai parameter pemulusan eksponensial yang optimal (yang memberikan ukuran akurasi terbaik).
- Memberikan informasi atau usulan bahwa algoritma program non linier dapat digunakan pada pemulusan eksponensial.

LANDASAN TEORI

PemulusanEksponensial

Pemulususan eksponensial (*exponential smoothing*) adalah metode peramalan yang menggunakan analisis data deret berkala (*time series data*) untuk melakukan perbaikan/pembaharuan terhadap objek pengamatan, titik berat metode ini adalah dengan memberikan bobot yang lebih kecil terhadap data berkala yang lebih lama secara eksponensial. Dalam hal ini data yang terbaru merupakan informasi prioritas bagi peramalan dibandingkan dengan data lama.

Terdapat beberapa metode pemulusan eksponensianya itu :

Pemulusan Eksponensial Tunggal

Pemulusan eksponensial tunggal adalah metode pemulusan yang paling sederhana, biasanya metode ini digunakan untuk peramalan jangka pendek dan tidak ada trend pada deret data berkala, metode ini merupakan pengembangan dari metode rata – rata bergerak (*moving average*) sederhana yaitu :

$$F_{t+1} = \frac{X_1 + X_{t-1} + \cdots + X_{t-n+1}}{n}$$

$$F_t = \frac{X_{t-1}+X_{t-2}+\cdots+X_{t-n}}{n}$$

Dengan memperhatikan hubungan kedua bentuk diatas dapat diperoleh bahwa :

$$F_{t+1} = \frac{X_t}{n} + F_t - \frac{X_{t-n}}{n}$$

bila $\frac{X_{t-n}}{n}$ diganti dengan nilai peramalan pada saat t akan diperoleh :

$F_{t+1} = \frac{X_t}{n} + F_t - \frac{F_t}{n}$atau$F_{t+1} = \frac{X_t}{n} + (1 - \frac{1}{n})F_t$

Dengan $\alpha = \frac{1}{n}$, maka :

$F_{t+1} = \alpha X_t + (1-\alpha)F_t$ ……………...(1)

Persamaan (1) disebut pemulusan eksponensial tunggal dengan :

F_{t+1}= Nilai ramalan waktu $t+1$

F_t = Nilai ramalan waktu t

X_t = Nilai aktual data pada waktu t

α =Parameter / Bobot pemulusan eksponensial

Pemulusan Eksponensial dengan Pola Trend

Metode ini disebut juga dengan metode dua parameter dari Holt biasanya digunakan untuk peramalan data yang menunjukkan adanya pola trend linier tetapi tidak menunjukkan adanya pola musiman, dalam metodeini proses pemulusan dilakukan dua kali yaitu pemulusan komponen level dan komponen trend (*slope*)

Peramalan yang melibatkan pola trend untuk periode $t+1$ yang akan dating adalah :

$F_{t+1} = L_t + T_t$………………………..(2)

Disini L_t adalah estimasi komponen level pada akhir periode t dan diberikan sebagai :

$L_t = \alpha X_t + (1-\alpha)F_t$ …………………(3)

Dan T_t adalah estimasi dari pola trend pada akhir periode$t$ yang diberikan sebagai :

$T_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1-\beta)T_{t-1}$ …….(4)

Pemulusan Eksponensial denga Pola Trend dan Musiman

Metode ini disebut juga pemulusan ganda tiga parameter dari Winter, biasanya digunakan untuk peramalan jika data deret berkala menunjukkan pola trend linier dan pola musiman.

Didasarkan atas tiga pola pemulusan yakni : untuk data stasioner, data trend, dan data musiman. Bentuk umum metode pemulusan ini adalah :

Pemulusan Eksponensial :

$$F_{t+1} = \alpha \frac{X_t}{S_t} + (1-\alpha)(F_t + T_t)$$

Estimasi Trend :

$$T_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1-\beta)T_{t-1}$$

Estimasi Musiman :

$$S_t = \mu \frac{X_t}{F_t} + (1-\mu)S_{t-l}$$

Dengan α, β, μ adalah parameter pemulusan dan l adalah panjang musim.

UkuranAkurasiPeramalan

Dalam menentukan suatu model peramalan hal yang paling penting adalah ketepatan atau akurasi dari model peramalan. Pada metode peramalan dengan pemulusan eksponensial terdapat beberapa jenis ukuran ketepatan peramalan yaitu :

1. MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*) : $MAPE = \frac{\sum_{t=1}^{T}(|X_t - F_t|)}{T} \times 100$
2. MAD (*Mean Absolute Deviation*) : $MAD = \frac{\sum_{t=1}^{T}(|X_t - F_t|)}{T}$
3. MSE (Mean Square Error) : $MSE = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - F_t)^2}{T}$

Algoritma Levenberg - Marquardt

Algoritma Levenberg - Marquardt dikembangkan secara mandiri oleh Kenneth Levenberg dan Donald Marquardt untuk menyelesaikan masalah minimasi fungsi non linier secara numerik.

Algoritma ini pada dasarnya adalah untuk menyelesaikan masalah metode kuadrat terkecil :

$$r_m = y_m - f(t_m, \theta)$$

$$C = \sum_m r_m(\theta)^2$$

Tentukan nilai $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ sedemikian hingga C minimum, metode ini pada dasarnya adalah menggabunggkan keunggulan metode *Gradient – Descent* dan *metode Guss– Newton.*

Berikut ini adalah algoritma Levenber – Marquardt :

Mulai dengan memberikan nilai tebakan awal x_0, x akan disesuaikan dengan δ hanya dengan langkah menurun :

$$(J^T J + \lambda I)\delta = J^T r$$

Dimana : J adalah matriks Jacobian dari turunan residu (r) terhadap masing – masing parameter. λ adalah parameter damping sedangkan r adalah vektor residu..

1. Inisiasi nilai parameter, x, parameter Levenber – Marquardt λ, sebagaimana baiknya apakah λ_{up} atau λ_{down} untuk penyesuaian parameter damping. Hitung Jacobian J pada saat nilai inisiasi.
2. Hitung nilai $g = J^T J + \lambda I$, Gradien $\nabla C = J^T r$, dan $C = \frac{1}{2} r^2$.

3. Evaluasi nilai residual baru r_{new} pada titik $x_{new} = x - g^{-1}\nabla C$, dan hitung nilai $C_{new} = \frac{1}{2} r_{new}^2$.
4. Jika nilai $C_{new} < C$, terima langkah ini dan tetapkan $x = x_{new}$, $r = r_{new}$ dan $\lambda = \frac{\lambda}{\lambda_{down}}$. Jika tidak tolak langkah ini, pertahankan nilai inisial x dan r , serta tetapkan $\lambda = \lambda \times \lambda_{up}$.
5. Uji kekonvergenan, jika metode sudah konvergen tetapkan x sebagai parameter yang paling layak, jika tidak konvergen tetapi metode diterima, evaluasi matriks Jacobian J pada nilai parameter baru dan kembali ke langkah 2.

METODOLOGI

Data yang digunakan dalam karya ilmiah ini adalah data sekunder yang diambil dari pihak kedua yaitu http://personal.cb.cityu.edu.hk/msawan/teaching/ms6215/Exponential%20Smoothing%20Methods.pdf. Data berikut ini adalah data volume penjualan thermostat selama 1 tahun pada setiap minggunya :

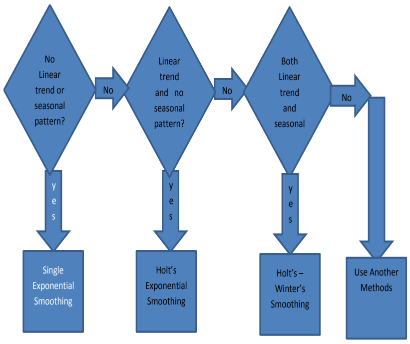
t	v	t	v	t	v	t	v
1	206	13	189	27	172	40	255
2	245	15	244	28	210	41	303
3	185	16	209	29	205	42	282
4	169	17	207	30	244	43	291
5	162	18	211	31	218	44	280
6	177	19	210	32	182	45	255
7	207	20	173	33	206	46	312
8	216	21	194	34	211	47	296
9	193	22	234	35	273	48	307
10	230	23	156	36	248	49	281
11	212	24	206	37	262	50	308
12	192	25	188	38	258	51	280
13	162	26	162	39	233	52	345

Ket : t = minggu ke-t, v=volume penjualan.

Untuk memperlihatkan bahwa algoritma Levenberg – Marquardt dapat menentukan nilai parameter optimal akan ditempuh langkah – langkah sebagai berikut

1. Analisis data yaitu : plot data deret berkala, melakukan pemodelan data apakah memuat pola trend dan musiman, serta menentukan model estimasi trend linier atau musiman dengan skema

sebagai berikut :



2. Menentukan fungsi tujuan yang akan dioptimasi, dalam kasus ini yang digunakan adalah minimasi MSE :

Minimumkan $C = \sum_m r_m(\theta)^2$, dengan

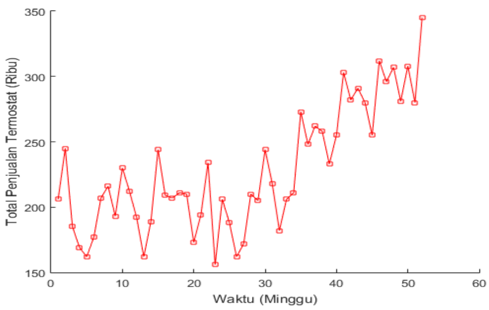
$$r_m = y_m - f(t_m, \theta)$$

Terhadap kendala : $0 < \theta < 1$ dimana $\theta = (\alpha, \beta, \mu)$

3. Menentukan parameter optimal dengan menerapkan algoritma Levenberg – Marqquardt pada langkah ke-2.
4. Membuat program Matlabuntuk melakukan perhitungan pada langkah ke-3 tersebut diatas.

HASIL dan PEMBAHASAN

Dari hasil analisis data dengan plot data deret berkala dapat ditemukan bahwa :



- Secara keseluruhan data bergerak dengan pola trendpostif (naik) pada setiap minggunya.
- Tidak terdapat siklus musiman atau pola musiman pada data tersebut.
- Dapat disimpulkan bahwa model yang tepat untuk data tersebut adalah pemulusan eksponensial dengan trend dua parameter dari Holt.
- Model peramalan dengan pemulusan metode Holt adalah : $F_{t+1} = L_t + T_t$
  $F_{t+1} = \alpha X_t + (1-\alpha)F_t + \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$.......(5)

Digunakan 26 data observasi pertama untuk menganalisa model trend terbaik, dengan ukuran akurasi yang digunakan adalah MSE. Dengan menerapakan metode kuadrat terkecil pada data observasi tersebut diperoleh bahwa persamaan garis trend yang cocok adalah :

$$\hat{y}_t = 202.6246 - 0.3682\ t$$

Maka :$l_0 = 202.6246$,$T_0 = -0.3682$

Nilai komponen level padasaat $t = 0$, adalah (l_0) dan komponen trend pada saat $t = 0$, adalah (T_0) tersebut digunakan untuk update nilai peramalan dengan menggunakan persamaan:(2),(3), (4).

Fungsi Tujuan

$Min\ \sum_t g(\alpha, \beta)$ dimana

$g = (F_t - y_t)^2$ atau

$$Min \sum_t [\alpha X_t + (1-\alpha)F_t + \beta(F_t - F_{t-1}) + (1-\beta)T_{t-1} - y_t]^2$$

Terhadap kendala : $0 \le \alpha \le 1, 0 \le \beta \le 1$

Matriks Jacobi

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_2}{\partial \beta} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_{26}}{\partial \alpha} & \frac{\partial g_{26}}{\partial \beta} \end{bmatrix} \qquad r = \begin{bmatrix} F_1 - y_1 \\ F_2 - y_2 \\ \vdots \\ F_{26} - y_{26} \end{bmatrix}$$

Levenberg_Marquardt

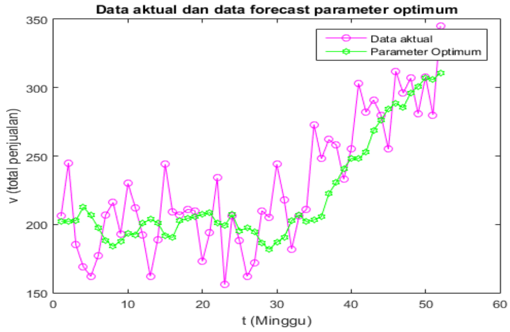
$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}_{baru} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}_{lama} - (J^T J + \lambda I)^{-1} J^T r$$

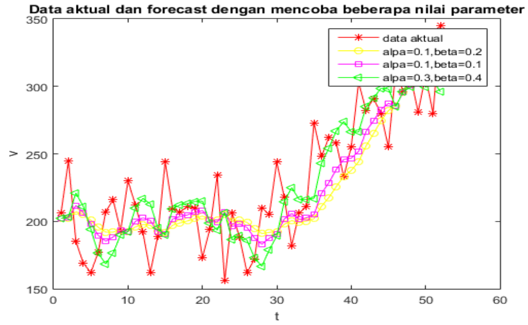
Dari hasil menjalankan program matlab yang telah dibuat untuk kasus ini, dengan nilai tebakan awal parameter : $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}_{inisial} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}$dan $\lambda = 2$ diperoleh bahwa parameter yang optimal adalah :

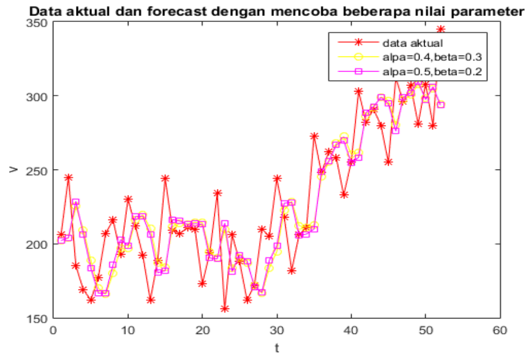
$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}_{opt} = \begin{bmatrix} 0.2201 \\ 0.0954 \end{bmatrix}$$

Berikut ini akan diberikan hasil peramalan dengan mencoba – coba berbagai kombinasi nilai α dan β yang mungkin sebagai perbandingan.

Nilai parameter	MSE	MAPE
$\alpha = 0.1, \beta = 0.2$	810	10,17%
$\alpha = 0.2, \beta = 0.1$	754	9,68%
$\alpha = 0.3, \beta = 0.4$	849	9,86%
$\alpha = 0.4, \beta = 0.3$	874	9,91%
$\alpha = 0.2, \beta = 0.5$	877	10,07%
$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}_{opt} = \begin{bmatrix} 0.2201 \\ 0.0954 \end{bmatrix}$	749	9,61%







KESIMPULAN dan SARAN

Berberapa hal yang dapat ditarik sebagai kesimpulan adalah :

- Algoritma Levenber-Marquardt mampu menghasilkan parameter yang optimal yaitu $\alpha = 0.2201$ dan $\beta = 0.0954$
- Nilai persentase error mutlak adalah 9,61%, ini termasuk baik karena dibawah 10%.
- Algoritma optimisasi non linier, terkhusus algoritma Levenberg – Maerquardt dapat dipergunakan untuk

menentukan parameter pemulusan eksponensial yang optimal tanpa harus mencoba seluruh kemungkinan kombinasi parameter yang mungkin, yang manahal ini akan menghabiskan waktu yang banyak.

- Algoritma Levenberg – Marquardt cukup sederhana dan mudah untuk diaplikasikan.

Saran yang dapat diberikan untuk pembahasan berikutnya adalah membandingkan berbagai algoritma optimisasi non linier untuk menentukan parameter pemulusan eksponensial, apakah memberikan hasil yang sama atau algoritma yang mana yang lebihcepat.

DAFTAR PUSTAKA

Afonso Croeze, Lindsey Pittman, and Winnie Reynolds, *Solving Nonlinear Least-Squares Problems with the Gauss-Newton and Levenberg – Marquardt Methods*.

Everette S. Gardner, Jr. Bauer College of Business 334 Melcher Hall University of Houston, *Exponential smoothing: The state of the art – Part II*.

Handanhal V. Ravinder, Montclair State University, USA, American Journal Of Business Education – May/June 2013, *Determining The Optimal Values Of Exponential Smoothing Constants – Does Solver Really Work?.*

Hao Yu and Bogdan M. Wilamowski, Auburn University, Levenberg–Marquardt Training. http://personal.cb.cityu.edu.hk/msawan/teaching/ms6215/Exponential%20Smoothing%20Methods.pdf.

Jens Jessen-Hansen, Aarhus 2011, *Levenberg-Marquardts algorithm Project in Numerical Methods*.

Leif Zinn-Bjorkman, *Numerical Optimization using the Levenberg-Marquardt Algorithm.*

Nila Yuwida, Lukman Hanafi, Nuri Wahyuningsih, JURNAL SAINS DAN SENI ITS Vol. 1, No. 1, (Sept. 2012) ISSN: 2301-928 X, *Estimasi Parameter α dan β Dalam Pemulusan Eksponensial Ganda Dua Parameter Dengan Metode Modifikasi Golden Section.*