Jurnal Ilmiah Teknik Sipil
Vol. 11, No.2, (2022) Agustus: 379 – 389
E-ISSN: 2721-0073, P-ISSN: 2302-2523
Doi: http://dx.doi.org/10.46930/tekniksipil.v11i2.2841

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE DUA DENGANSISTEM PERSAMAAN NONLINIER

Oleh:
Hery Andi Sitompul [1)]
Enzo W. B. Siahaan [2)]
Universitas Darma Agung, Medan [1,2)]
E-mail: herystpl@gmail.com [1)]
Enzo.battra84@gmail.com [2)]

History Jurnal Ilmiah Teknik Sipil:
Received : 25 Maret 2022
Revised : 10 Mei 2022
Accepted : 23 Juli 2022
Published : 20 Agustus 2022

Publisher: LPPM Universitas Darma Agung

ABSTRACT

In general, the numerical solution of a second order differential equation and the initial value problem is approximated by the Runge-Kutta method. If given is a second order differential equation with boundary conditions then this method is not suitable and the Central FiniteDifference method is an option for approximating the numerical solution of these differential equation. The application of the Central Finite Difference method will present a system of nonlinear equations with several variables to be solved. The Newton method will be applied in this study to obtain the solution of the nonlinear system of equations, and it is found that the application of Newton's method to Centralized Finite Differences is very good at approximating the exact solution of the second order differential equation with boundary conditions.
Key Word : Nonlinear, Finite Difference, Newton Method, Differential Equation

ABSTRAK

Pada umumnya solusi numerik dari sebuah persamaan diferensial orde 2 dan masalah nilai awal diaproksimasi dengan metode Runge-kutta. Jika yang diberikan adalah persamaan diferensial orde 2 dengan kondisi batas maka metode ini tidak sesuai dan metode Beda Hingga Terpusat merupakan pilihan untuk aproksimasi solusi numerik persamaan diferensial tersebut. Penerapan metode Beda Hingga Terpusat akan menghadirkan sebuah sistem persamaan nonlinier dengan beberapa variabel yang harus diselesaikan. Metode Newton akan diterapkan dalam kajian ini untuk mendapatkan solusi sistem persamaan nonlinier tersebut, dan diperoleh bahwa penerapan metode Newton pada Beda Hingga Terpusat sangat baik dalam mengaproksimasi solusi eksak dari persamaan diferensial orde 2 dengan kondisi batas.
Kata Kunci : **Nonlinier, Beda Hingga, Metode Newton, Persamaan Diferensial**

1. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Sudah bertahun – tahun lamanya para ilmuwan dan para teknisi rekayasa menggunakan metode numerik untuk mendekati solusi eksak/sebenarnya ketika solusi eksak tersebut tidak bisa didapatkan melalui metode aljabar. Beberapa diantaranya adalah untuk mendekati solusi persamaan diferensial biasa maupun parsial, persamaan nonlinier dan sistem persamaan nonlinier.

Metode numerik yang umum digunakan untuk mendapatkan solusi persamaan nonlinier adalah metode Newton, Bisection dan secant. Sedangkan untuk medapatkan solusi numerik dari persamaan diferensial biasa adalah metode Runge Kutta. Semua metode tersebut hanya berfokus pada persamaan dengan satu variabel saja dan tidak dapat digunakan jika persamaannya memiliki lebih dari satu variabel. Oleh karena hal ini dalam tulisan ini akan mencoba fokus pada pembahasan metode numerik untuk penyelesaian sistem persamaan nonlinier lebih dari satu variabel yaitu metode Newton dan Broyden, sedangkan untuk penyelesaian persamaan difrensial biasa orde dua adalah metode beda hingga (*Finite Difference Method*).

1.2. Maksud dan Tujuan

Maksud dari tulisan ini adalah untuk melakukan kajian apakah metode penyelesaian sisitem persamaan nonlinier secara numerik dapat digunakan untuk mendapatkan solusi dari sebuah persamaan diferensial biasa khusus orde dua dan menggunakan pemograman komputer Matlab untuk menyelesaikan hal yang dimaksudkan tersebut. Adapun tujuan daritulisan ini adalah :

1. Menerapkan salah satu dari metode Newton atau Broyden pada metode Beda Hingga.
2. Mendapatkan solusi numerik dari sebuah persamaan diferensial biasa dengan kondisi batas menggunakan penerapan penyelesaian sistem persamaan nonlinier pada metode beda hingga.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Sistem Persamaan Nonlinier

Sistem persamaan nonlinier merupakan kumpulan dari beberapa persamaan yang tidak memenuhi kaidah kelinieran, dimana satu persamaan dengan persamaan lainnya saling bersinergi sehingga solusi untuk semua persamaan adalah sama untuk keseluruhan sistem. Kaidah kelinieran yang dimaksud adalah :

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$

, jika sebuah persamaan tidak memenuhi prinsip ini maka dikatakan persamaan nonlinier. Dalam bentuk formal disebut sebuah persamaan nonlinier jika :

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Dimana :

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$

Sedangkan sistem persamaan nonlinier adalah

$$f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

$$f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

Dimana $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ dan setiap f_i merupakan fungsi ril nonlinier untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

Sebagai contoh sistem persamaan nonlinier :

$$2x_1 - cos(x_2 x_3) - \frac{3}{4} = 0$$

$$x_1^2 - 5(x_2 + 3)^2 + sinx_3 + 6 = 0$$

$$e^{-x_1 x_2} + 20x_3 - 10 = 0$$

Solusi dari sistem persamaan nonlinier adalah himpunan dari titik $(a_1, a, \cdots, a) \in \mathbb{R}^n$ yang sedemikian hingga

$$f_1(a_1, a_2, \cdots, a_n) = f_2(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \cdots = f_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$$

Karena kerumitan dari sistem persamaan nonlinier, maka untuk menyelesaikan sistem ini dengan cara menyelesaikan sistem persamaan linier adalah hal yang mustahil, maka digunakan cara iteratif untuk menyelsaikannya yang disebut dengan metode numerik.

2.1.1. Metode Newton

Metode Newton merupakan salah satu metode yang paling terkenal dalam meode numerik, karena metode ini sangat tangguh dalam menyelesaikan persamaan $f(x) = 0$.

Metode ini bermula dari ekspansi deret Taylor $f(x)$ pada titik x_1 :

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1) + \frac{1}{2!}(x - x_1)^2 f''(x_1) + \cdots + \frac{1}{n!}(x - x_1)^n f^n(x_1)$$

Jika diambil dua bentuk pertama dari persamaan diatas maka diperoleh :

$$f(x) \approx f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1)$$

Dan misalkan $f(x) = 0$ akan diperoleh akarpersamaan :

$$f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1) = 0$$

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Dengan melakukan perumuman dri persaman diatas akan didapatkan metode iteratif dari Newton yaitu :

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

Untuk $(i = 1, 2, \dots, n)$

Namun metode iteratif Newton ini hanya bisa menyelesaikan persamaan nonlinier satu variabel, oleh karena itu bentuk iteratif ini harus kita ubah dan disesuaikan agar dapat menyelesaikan satu himpunan persamaan nonlinier peubah banyak.

Berdasarkan prinsip aljabar liniermengubah sistem persamaan nonlinier

$X^{(k)} = X^{(k-1)} - J\left(X^{(k-1)}\right)^{-1} F\left(X^{k-1}\right)$

Dimana $J(X)^{-1}$ adalah invers dari matriks Jacobian, dan $k = 1,2,\ldots,n$ merupakan proses iterasi, F adalah vektor fungsi dan $x \in \mathbb{R}^n$. Persamaan diatas merupakan prosedur Newton untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinier yang tadinya menyelesaikan $f(x) = 0$ sekarang prinsipnya adalah menyelesaikan $F(x) = 0$.

Berikutnya masing - masing komponen persamaan diatas didefenisikan :

1. Misalkan sebuah fungsi F yangmemetakan $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dimana :

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{bmatrix}$$

Dimana $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

2. Misalkan $X \in \mathbb{R}^n$ maka X merupakan vektor :

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix}$$

Dimana $x_i \in \mathbb{R}$ dan $i = 1,2,\ldots,n$

kedalam bentuk matriks, sehingga bentukiteratif Newton tersebut menjadi :

3. Misalkan $J(X)$ merupakan matriks Jacobian, dari defenisi matriks Jacobian maka $J(X)^{-1}$ adalah :

$$J(X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{-1}$$

Berikut ini merupakan langkah – langkah metode Newton untuk meyelesaikan $F(X) = 0$

1. Misalkan $X^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ merupakan vektor nilai awal.
2. Hitung $J\left(X^{(0)}\right)$ dan $F\left(X^{(0)}\right)$
3. Hitung vektor $y^{(0)}$ dimana $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, nilai $y^{(0)}$ dapat diperoleh daripersamaan linier $J\left(X^{(0)}\right) y^{(0)} = -F\left(X^{(0)}\right)$, sedemikian hingga $y^{(0)} = -J\left(X^{(0)}\right)^{-1} F\left(X^{(0)}\right)$ dan bentuk ini dapat kita gantikan dalam metode ietratif Newton sehingga : $X^{(k)} = X^{(k-1)} - J\left(X^{k-1}\right)^{-1} F\left(X^{k-1}\right) = X^{(k-1)} + y^{(k-1)}$.

4. Jika $y^{(0)}$ sudah diperoleh maka prosesietrasi awal dapat diselesaikan dengan

$$X^{(1)} = X^{(0)} + y^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{bmatrix}.$$

samapai ke k yang mengindikasikan bahawa $F(X^{(k)}) = 0$. Proses ke k berhenti jika dicapai $\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| \approx 0$,dengan

$$\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| = \sqrt{\left(x_1^k - x_1^{k-1}\right)^2 + \left(x_2^k - x_2^{k-1}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^k - x_n^{k-1}\right)^2}$$

2.1.2. Metode Broyden

Dalam metode Newton kita harus menentukan matriks Jacobian $J(X)$ dan inversnya disetiap proses iterasi yang merupakan kendala tersendiri. Broyden mengembangkan sebuah metode yang disebut dengan metode Quasi Newton dimana matriks Jacobian digantikan oleh sebuah matriks pendekatan A_i. Metode Newton berubah menjadi :

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - A_k^{-1} F(X^k)$$

Prosedur metode Broyden sebenarnya identik dengan metode Newton. Pada langkah ke-3 metode Newton gantikandengan A_k dimana :

5. Jika $X^{(1)}$ sudah dapat dihitung, maka proses itersi ini diulang terus menerus

$$A_k = A_{k-1} + \frac{y_k - A_{k-1}s_k}{\|s_k\|_2^2} s_k{}^t$$

Dimana $y_k = F(X^{(k)}) - F(X^{(k-1)})$ dan $s_k = X^{(k)} - X^{(k-1)}$. Perlu diperhatikan bahwa dalam perhitungan pada metdeoe Broyden yang digunakan adalah A_k^{-1} bukan A_k. Prosedur pada metode Broyden adalah sebagai berikut :

1. Misalkan $X^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ merupakan vektor nilai awal.
2. Hitung $F(X^{(0)})$
3. Hitung A_0^{-1}, dikarenakan ketiadaaninformasi untuk mengitung A_0 maka Broyden mengijinkan untuk mengambilnilai awal $A_0 = J(X^{(0)})$ dengan demikian $A_0^{-1} = J(X^{(0)})^{-1}$.
4. Hitung $X^{(1)} = X^{(0)} - A_0{}^{-1} F(X^{(0)})$
5. Hitung $F(X^1)$
6. Hitung $y_1 = F(X^1) - F(X^{(0)})$ dan $s_1 = X^{(1)} - X^{(0)}$.
7. Hitung

8. Hitung

$$A_1^{-1} = A_0^{-1} + \left(\frac{1}{s_1^t A_0^{-1} y_1}\right)[(s_1 - A_0^{-1} y_1)(s_1^t A_0^{-1})]$$

9. Gunakan A_1^{-1} pada langkah 8 untuk menhitung $X^{(2)} = X^{(1)} - A_1{}^{-1} F\left(X^{(1)}\right)$.
10. Ulangi proses sampai $\left\| X^{(k)} - X^{(k-1)} \right\| \approx 0$.

2.2. Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial adalah suatu bentuk persamaan yang memuat derivatif atau turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas suatu fungsi. Secara umum persamaan diferensial terbagi atas persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Persamaan diferensial biasa adalah suatu bentuk persamaan yang memuat sebuah variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas sebuah fungsi. Sedangkan orde dari persamaan diferensial biasa tergantung pada kandungan turunan dalam persamaan diferensial tersebut, sebagaicontoh :

$y' = sinx + 2x$ merupakan persamaan diferensial orde satu.

$y'' - 7y + 3 = 0$ merupakan persamaan diferensial biasa orde 2.

$y''' - 2y'' + y' + 3y - 5 = 0$ merupakan persamaan diferensial biasa orde 3.

Solusi dari persamaan diferensial biasa suatu fungsi y yang memuat satu variabel bebas x yang memenuhi sebuah persamaan diferensial biasa yang disbut dengan solusi eksak. Akan tetapi tidak semua persamaan diferensial biasa dapat ditentukan solusi eksak, maka para ilmuwan mengembang solusi numerik untuk mendapatkan solusi persamaan diferensial biasa. Salah satu dari metode numerik yang paling populer untuk solusi persamaan diferensial biasa adalah metode Runge-Kutta, akan tetapi metode ini mengharuskan hanya syarat nilai awal saja tidak pada kondisi batas. Metode beda hingga merupakan metode numerik yangmengakomodir hal tersebut.

2.2.1. Metode Beda Hingga

Metode beda hingga merupakan metode numerik untuk aproksimasi solusi persamaan diferensial biasa dengan kondisi batas. Dalam tulisan ini fokus pembahasan adalah persamaan diferensial biasa orde 2. Misalkan :

$$y'' = f(y', y, x), a \leq x \leq b$$

$$y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

Dimana f adalah sebuah fungsi, a, b adalah titik ujung sedangkan $(a) = \alpha, y(b) = \beta$ adalah kondisi batas.

Langkah – langkah metode beda hingga untuk menyelesaikan persamaandiferensial adalah :

formula beda hingga pusat maka dapat diperoleh :

$$y''(x_i) = f\left(x_i, y'(x_i), y(x_i)\right)$$

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} = f\left(x_i, \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}, y(x_i)\right)$$

3. Misalkan nilai $y(x_i)$ adalah w_i maka metode beda hingga untuk persamaandiferensial orde 2 adalah :

$$-\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} + f\left(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\right) = 0,$$

$i = 1,2, \ldots, N$ dan kondisi batas

$$w_0 = \alpha, w_{N+1} = \beta$$

3. METODE PENELITIAN

Tahapan kerja dalam tulisan ini dimulai dengan menerapkan metode beda hingga terpusat pada sebuah persamaan diferensial biasa orde 2 yaitu :

1. Bagi interval $[a, b]$ menjadi $N + 1$ subinterval dengan $h = \frac{b-a}{N}$ sedemikian hingga titik akhir dari setiap subinterval adalah : $x_i = a + ih, \quad i = 1,2, \ldots, N + 1$
2. Dengan menggunakan eksapansi Taylor untuk menghitung y pada saat pada x_i

$y'' = 2y' - 2y, \qquad 0 \leq x \leq 2$ dan

$y(0) = 1, y(2) = -3.0749$

sehingga diperoleh sebuah sistem persamaan nonlinier pada setiap subinterval x_i,

selanjutnya sistem persamaan nonlinier tersebut akan diselesikan dengan metode Newton sehingga solusi numerik persamaan diferensial biasa orde 2 diperoleh. Seluruh perhitungan untuk mendapatkan solusi numerik akan dilakukan dengan simulasi pemograman Matlab.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Interval $0 \leq x \leq 2$ akan dibagi menjadi 20 interval dengan $h = 0{,}1$ sehingga diperoleh :

i	x_i	i	x_i	i	x_i
0	0	7	0,7	14	1,4
1	0,1	8	0,8	15	1,5
2	0,2	9	0,9	16	1,6

3	0,3	10	1,0	17	1,7
4	0,4	11	1,1	18	1,8
5	0,5	12	1,2	19	1,9
6	0,6	13	1,3	20	2

Dari kondisi batas bahwa $y(0) = 1, y(2) = -3{,}0749$, dapat ditulis menjadi $w_0 = 1, w_{N+1} = w_{20} = -3{,}0749$

Dengan menerapkan metode beda hinggaterpusat pada persamaan diferensial tersebut

Misalkan sistem persamaan nonlinier 19×19 yang dihasilkan oleh metode beda hingga diatas adalah $F(W)$.

Pada $F(W)$ akan diimplementasikan metode Newton untuk mengaproksimasi solusi dari sistem, langkah pertama yang harus dilakukan adalah dengan menentukan nilai tebakan awal $W^{(0)}$, dimana :

$$W^{(0)} = \begin{bmatrix} w_1^{(0)} \\ w_2^{(0)} \\ \vdots \\ w_N^{(0)} \end{bmatrix}$$

Dan $w_i^{(0)} = 1 + \frac{-3{,}0749-1}{2-0}(x_i - 0)$, $i = 1,2,\dots,19$.

$$W^{(0)} = [0{,}7963\ 0{,}5925\ 0{,}3888\ 0{,}1850\ -0{,}0187\ -0{,}2225\ -0{,}4262\ -0{,}76300\ -0{,}8337\ -1{,}0374\ -1{,}2412\ -1{,}4449\ -1{,}6487\ -1{,}8524\ -2{,}0562\ -2{,}2599\ -2{,}4637\ -2{,}6674\ -2{,}8712]^t$$

maka pada setiap x_i akan diperoleh persamaan :

$$\left(\frac{w_2 - 2w_1 + w_0}{h^2}\right) - 2\left(\frac{w_2 - w_0}{2h}\right) + 2w_1 = 0$$

$$\left(\frac{w_3 - 2w_2 + w_1}{h^2}\right) - 2\left(\frac{w_3 - w_1}{2h}\right) + 2w_2 = 0$$

$$\left(\frac{w_4 - 2w_3 + w_2}{h^2}\right) - 2\left(\frac{w_4 - w_2}{2h}\right) + 2w_3 = 0$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{w_{19} - 2w_{18} + w_{17}}{h^2}\right) - 2\left(\frac{w_{19} - w_{17}}{2h}\right) + 2w_{18} = 0$$

$$\left(\frac{w_{20} - 2w_{19} + w_{18}}{h^2}\right) - 2\left(\frac{w_{20} - w_{18}}{2h}\right) + 2w_{19} = 0$$

Langkah selanjutnya adalah dengan menentukan matriks Jacobian untuk W sebut dengan $J(W)$, dimana :

$$J(w) = \begin{bmatrix} \frac{-2}{h^2} + 2 & \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h} & 0 & \cdots & & 0 \\ \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h} & \frac{-2}{h^2} + 2 & \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h} & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h} & & \frac{-2}{h^2} + 2 \end{bmatrix}$$

$J(w)$ adalah matriks tridiagonal berukuran 19×19.

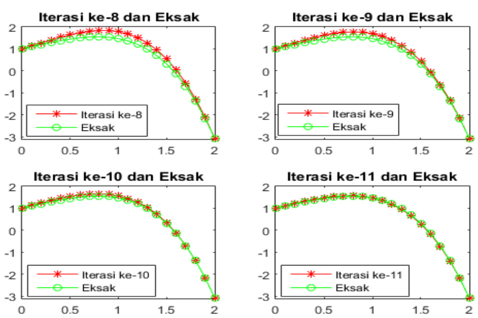
Setelah komponen dari $W^{(0)}$, $F(W)$, dan $J(w)$ dapat didefenisikan maka perhitungan sesuai dengan algoritma metode Newton dapat dilakukan melalui simulasi pemograman matlab.

Hasil yang diperoleh setelah menjalankan program adalah sebagai berikut :

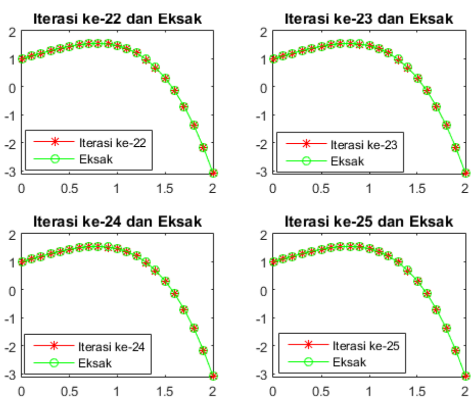
x_i	w_i	$w^{(0)}$	$w^{(1)}$	⋯	$w^{(24)}$	$w^{(25)}$
0	w_0	1	1	⋯	1	1
0.1	w_1	0.7963	0.2871	⋯	1.0993	1.0996
0.2	w_2	0.5925	-0.4460	⋯	1.1965	1.1971
0.3	w_3	0.3888	-1.1850	⋯	1.2887	1.2896
0.4	w_4	0.1850	-1.9151	⋯	1.3732	1.3741
0.5	w_5	-0.0187	-2.6212	⋯	1.4454	1.4469
0.6	w_6	-0.0225	-3.2887	⋯	1.5025	1.5039
0.7	w_7	-0.4262	-3.9033	⋯	1.5386	1.5402
0.8	w_8	-0.7630	-4.4514	⋯	1.5488	1.5505
0.9	w_9	-0.8337	-4.9207	⋯	1.5271	1.5289
1.0	w_{10}	-1.0374	-5.3001	⋯	1.4669	1.4687
1.1	w_{11}	-1.2412	-5.5800	⋯	1.3620	1.3627
1.2	w_{12}	-1.4449	-5.7529	⋯	1.2015	1.2031
1.3	w_{13}	-1.6487	-5.8130	⋯	0.9802	0.9815
1.4	w_{14}	-1.8524	-5.7568	⋯	0.6882	0.6893
1.5	w_{15}	-2.0562	-5.5832	⋯	0.3161	0.3170
1.6	w_{16}	-2.2599	-5.2932	⋯	-0.1453	-0.1446
1.7	w_{17}	-2.2437	-4.8904	⋯	-.07058	-0.7053
1.8	w_{18}	-2.6674	-4.3806	⋯	-1.3748	-1.3745
1.9	w_1	-2.8712	-3.7720	⋯	-2.1616	-2.1615
2.0	w_{21}	-3.074	-3.074	⋯	-3.074	-3.074

		9	9		9	9

Data yang ditampilkan dalam tabel diatas merupakan rangkuman dari proses perhitungan dalam Matlab dimana iterasi berhenti pada langkah ke -25 dimana diperoleh bahwa : $\sqrt{\left(w_i^{(25)} - w_i^{(24)}\right)^2} < 0.001$. Maka solusi numerik dari persamaan diferensial tersebut adalah $w_i^{(25)}$. Berikut ini merupakan hasil yang diperoleh dari Matlab berupa grafik

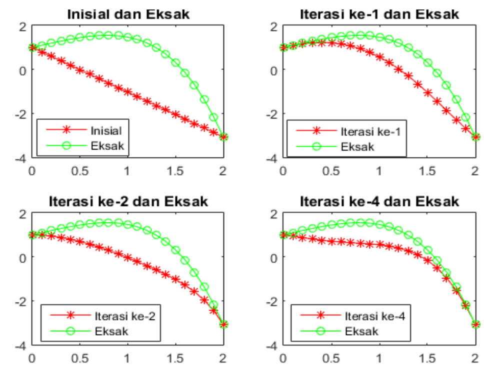


Gambar 2. Perbandingan nilai pada iterasi ke-8,9,10,11 dan nilai eksak.



Gambar 3. Perbandingan nilai iterasi ke-22,23,24,25 dan nilai eksak.

perhitungan dari beberapa iterasidibandingkan dengan solusi eksak.



Gambar 1. Perbandingan nilai inisial, iterasi 1, 2 dan 4 dengan nilai eksak.

Dapat dilihat pada gambar 1 nilai inisial cukup jauh dari nilai eksak, pada iterasi ke 1, 2 dan 4 masih terlihat dengan jelas bahwa nilai eksak dan nila numerik masih mempunyai selisih yang sangat besar. Pada gambar 2 yang merupakan nilai numerik pada proses iterasi ke-8,9,10 dan 11 masih terlihat selisih yang signifikan sedangkan pada gambar ke-3 yaitu pada itersai ke-22,23,24 dan 25 selisih sudah sangat kecil dan berhenti pada iterasi ke-25 karena $\left\| w_i^{(25)} - w_i^{(24)} \right\| \leq 0.001$.

5. SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan dan hasil yang diperoleh pada bab diatas dapat diambil kesimpulan dan saran sebagaimana berikut ini.

1. Metode Newton untuk penyelesaian sistem persamaan nonlinier dapatditerapkan dengan baik pada prinsip metode Beda Hingga Terpusat terkhusus untuk persamaan diferensial orde dua dengan kondisi

   batas yang diberikan..
2. Solusi numerik yang diperoleh dalamkasus pada kajian ini adalah $w_i^{(25)}$.
3. Jika dibandingkan dengan solusieksak maka solusi numerik yang diperoleh melalui penerapan metode Newton pada Beda Hingga Terspusat adalah sangat baik dengan nilai toleransi $0{,}001$.

Saran

Dalam kajian ini metode penyelesaian sistem persamaan nonlinier yang digunakan adalah metode Newton dimana iterasi berhenti pada langkah ke-25 yang mana langkah ini cukup lama. Kemungkinan jika diganti dengan metode Broyden akan mengkasilkan langkah yang berbeda, apakah lebih cepat atau lebih lama.

6. DAFTAR PUSTAKA

Atkinson, K.E. (1978). *An Introduction to Numerical Analysis. Nonlinear Systems of Equations* . Canada: John Wiley & Sons

Burden, R.L., Faires, J.D (2005). *NumericalAnalysis. Boundary-Value Problems for Ordinary Differential Equations*, Belmount: Thomson Brooks/Cole

J.C. Butcher. (2008). *Numerical Method for Ordinary Differential Equation.* Second Edition, John Wiley & Sons Ltd.

P.Rabinowitz. *Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations.* Gordon and Breach Science Publisher.