SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE TINGGI MELALUI PENDEKATAN METODE BEDA PUSAT NEWTON

Oleh:
Hery Andi Sitompul [1)]
Enzo W. B. Siahaan [2)]
Universitas Darma Agung [1,2)]
E-mail:
herystpl@gmail.com [1)]
Enzo.battra84@gmail.com [2)]

Abstract

The numerical solution of an ordinary differential equation model is urgently needed when the exact solution is difficult to obtain, so scientists are trying to develop various methods or numerical techniques for approximating the exact solution. There are several numerical methods for solving high-order ordinary differential equations, although not as many as the first-order or second-order numerical methods. Newton's difference method is very popular for interpolating the value of a polynomial where the results are very good. Assuming that the higher order ordinary differential equation is a polynomial, then the scheme of Newton's difference method, especially the center difference, can be used to approximate the solutions of the ordinary differential equations and the results obtained in this study are very good when compared to exact solutions.

Key Word : ODE, Newton Differences, Aproximation

Abstrak

Solusi numerik dari sebuah model persamaan diferensial biasa sangat dibutuhkan pada saat solusi eksak sulit didapatkan, sehingga para ilmuwan berusaha untuk mengembangkan berbagai metode atau teknik numerik untuk aproksimasi solusi eksak tersebut. Terdapat beberapa metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde tinggi, walaupun tidak sebanyak metode numerik untuk orde satu atau orde dua. Metode beda Newton sudah sangat populer untuk interpolasi nilai sebuah polinom dimana hasilnya sangat baik. Dengan menganggap bahwa persamaan diferensial biasa orde tinggi adalah merupakan sebuah polinom maka skema metode beda Newton terkhusus beda pusat akan dapat digunakan untuk aproksimasi solusi persamaan diferensial biasa dan hasil yang diperoleh dalam kajian ini sangat baik jika dibandinggak dengan solusik eksak.

Kata Kunci : PDB**, Beda Newton, Aproksimasi.**

1. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Berbagai kasus dalam pemodelan matematika maupun permasalahan bidang teknik/*engineering*, sering kali harus ditulis dalam sebuah persamaan diferensial. Baik itu persamaan diferensial biasa mupun persamaan diferensial parsial. Tentu saja model persamaan diferensial tersebut harus dicari solusinya, baik itu solusi eksak maupun solusi numerik. Sangat sering dijumpai/dialami para ilmuwan maupun enginer bahwa solusi eksak dari sebuah persamaan diferensial sangat susah ditentukan sehingga pendekatan solusi numerik merupakan pilihan yang sangat populer.

Dalam hal solusi numerik

persamaan diferensial biasa, sudah sangat banyak dibahas oleh para ilmuwan, terutama persamaan diferensial orde satu. Tetapi untuk solusi numerik dari persamaan diferensial orde yang lebih tinggi, pembahasan atau sumber literatur masih sangat minim ditemukan. Pada umumnya solusi numerik yang sering digunakan para ilmuwan adalah metode Runge-Kutta, metode Adam-Basforth, dan metode Adam-Moulton.

Dengan tersedianya berbagai komputasi matematika seperti Matlab, maka berbagai kasus numerik dari matematika dapat dikerjakan dengan baik. Oleh karena itu dalam karya tulis ini akan disajikan pembahan untuk mengerjakan solusi numerik dari persamaan diferensial biasa khusus orde tinggi.

1.2. Maksud dan Tujuan

Maksud dari tulisan ini adalah untuk melakukan sebuah kajian untuk menentukan solusi numerik dari sebuah persamaan diferensial biasa (PDB) khususnya orde tinggi dan sejauh mana tingkat akurasinya untuk jika dibandingkan dengan solusi eksak/analitik. Sedangkan tujuan dari tulisan ini adalah :

1. Melakukan perhitungan secara metode numerik (dalam hal ini adalah pendekatan metode beda Newton) persamaan difreensial biasa orde tinggi.
2. Membanding hasil yang diperoleh dari perhitungan numerik tersebut diatas dengan solusi eksak.
3. Mendapatkan solusi numerik dari persamaan diferensial biasa orde tinggi.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Persamaan Diferensial Biasa(PDB)

Persamaan diferensial adalah sebuah persamaan yang memuat satu fungsi (variabel tak bebas) dan fungsi turunannya terhadap satu atau lebih variabel bebasnya. Secara umum persamaan diferensial dibagi dua, yakni persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP).

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat sebuah fungsi dengan satu variabel bebas dan turunan fungsi tersebut terhadap variabel bebasnya. Bentuk umumnya adalah :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Atau dalam bentuk orde tinggi :

$$f(y^n, y^{n-1}, y^{n-2}, \dots, y', y, x) = 0$$

Dengan masalah nilai awal :

$$y(x_0) = a_0$$

$$y'(x_0) = a_1$$

$$y''(x_0) = a_2$$

$$\vdots$$

$$y^n(x_0) = a_n$$

2.2. Solusi Persamaan Diferensial Biasa

Solusi persamaan diferensial biasa secara umum adalah sebuah fungsi $y = f(x)$ yang memenuhi persamaan diferensial tersebut jika diturunkan sesuai variabel bebasnya. Solusi ini disebut dengan solusi eksak/analitik. Terdapat berbagai teknik untuk menentukan solusi tersebut, terutama untuk persamaan diferensial biasa orde satu, sedangkan untuk orde dua dengan masalah nilai awal pada umumnya ditentukan dengan menggunakam persamaan karakteristik dan transformasi Laplace

2.2.1. Solusi Numerik PDB

Solusi numerik dari sebuah persamaan diferensial biasa (PDB) adalah angka – angka hasil perhitungan berdasarkan metode numerik yang ada dalam mendekati solusi analitik/eksak dari sebuah PDB. Terdapat beberapa metode yang populer untuk menentukan solusi numerik dari persamaan difersial biasa, terkhusus untuk orde satu, tetapi untuk orde yang lebih tinggi masih sangat terbatas.

2.3. Metode Beda Newton

Metode beda Newton bekerja

dengan merubah daerah variabel bebas menjadi grid berhingga dimana variabel dependen akan diaproksimasi. Berikut ini skema beda Newton :

Misalkan $x \in [a, b]$ akan dibagi menjadi N grid dengan panjang h :

$$h = \frac{b-a}{N}$$

sedemikian hingga $x_0 = a, x_1 = x_0 + h, \dots, x_n = x_{n-1} + h$. Dari grid ini variabel dependen (misalkan $f(x)$) akan diaproksimasi berdasarkan beda hingga terbagi $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$. Sebagai contoh : $f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Beda Maju

Formulasi beda maju Newton dikontruksi berdasarkan notasi beda maju Δ:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h}\left(f(x_1) - f(x_0)\right) = \frac{1}{h}\Delta f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2h}\frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{h} = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_0)$$

Dalam bentuk umum :

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{1}{2h}\frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{h} = \frac{1}{k!\, h^k}\Delta^k f(x_0)$$

Sehingga Formulasi beda maju Newton adalah :

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0)$$

Dimana s adalah :

$x - x_i = (s - i)h$

Beda Mundur

Jika simpul – simpul pada interpolasi disusun berdasarakan simpul terakhir hingga awal $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0$ maka polynom interpolasi dapat dituliskan menjadi :

$$P_n(x) = f(x_n) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{s}{k} \nabla^k f(n)$$

Beda Pusat

Formulasi beda maju dan beda mundur Newton tidak akan sesuai untuk aproksimasi $f(x)$ ketika x berada dekat pada pusat tabel. Sehingga muncul formula Stirling, dimana untuk formula beda pusat dipilih x_0 dekat dengan titik yang akan diaproksimasi,titik $x_1, x_2, \dots$ adalah titik dibawah x_0 dan $x_{-1}, x_{2-}, \dots$ adalah titik diatas x_0 pada tabel. Formula beda pusat dri Stirling diberikan sebagai berikut :

$$P_n(x) = P_{2m+1}$$

$$= f[x_0] + \frac{sh}{2}\left(f[x_{-1}, x_0] + f[x_0, x_1]\right) + s^2h^2 f[x_{-1}, x_0, x_1]$$
$$+ \frac{s(s^2-1)h}{2}\left(f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1] + f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2]\right) + \cdots$$
$$+ s^2(s^2-1)(s^2-4)\dots(s^2-(m-1)^2)h^{2m} f[x_{-m}, \dots, x_m]$$
$$+ \frac{s(s^2-1)\dots(s^2-m^2)h^{2m+1}}{2}\left(f[x_{-m-1}, \dots, x_m] + f[x_{-m}, \dots, x_{m+1}]\right)$$

Jika $n = 2m + 1$ adalah bilangan ganjil, $n = 2m$ jika bilangan genap.

3. METODE PENELITIAN

Secara garis besar tahapan yang dilakukan dalam kajian ini dimulai dengan mengkontruksikan bentuk umum persamaan diferensial biasa orde n khususnya bentuk nonlinier kedalam bentuk formulasi beda pusat Newton, kemudian membedah sebuah contoh kasus, membandingkannya dengan solusi eksak, kemudian menarik kesimpulan dari kajian yang dilakukan.

Bentuk umum persamaan diferensial biasa orde n dengan nilai awal :

$f\left(y^{(n)}, y^{n-1}, y', y, x\right) = 0$

Dimana :

$y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, . \quad . \quad .,$ $y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$

Misalkan akan diaproksimasi solusi persamaan diferensial untuk $x = [a, b]$ dimana a dan b adalah nilai tetap.

Selanjutnya variabel bebas x dibagi

menjadi N subinterval : $\frac{b-a}{N}$ sedemikian hingga diperoleh $N+1$ titik simpul/grid yaitu x_i dimana $i = 0,1,\ldots,N$.

Untuk memulai perhitungan himpunan $N+1$ simpul/grid dibagi menjadi subhimpunan :

$$\tilde{n} = \begin{cases} n+2, jika\ n\ genap \\ n+1, jika\ n\ ganjil \end{cases}$$

Dimana $\frac{\tilde{n}}{2}$ titik berada disebelah kiri x_i dan diberi indeks negatif misalnya : $x_{-1}, x_{-2}, \ldots, x_{-\frac{\tilde{n}}{2}}$ dan $\frac{\tilde{n}}{2}$ lainnya disebelah kanan x_i sedemikian hingga himpunan simpul

$$S = \left\{x_{-\frac{\tilde{n}}{2}}, x_{-\frac{\tilde{n}}{2}+1}, x_{-\frac{\tilde{n}}{2}+2}, \ldots, x_0, x_1, \ldots, x_N\right\}$$

Selanjutnya dengan skema beda pusat untuk turunan orde ke-*m* dari *y* pada x_i dapat diaproksimasi dengan :

$$y^{(m)}(x_i) = \frac{1}{h^m}\sum_{i=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} (-1)^{i+\frac{m}{2}} \binom{m}{i+\frac{m}{2}} y_i, jika\ m\ genap$$

Dan $y^{(m)}(x_i) =$

$$\frac{1}{2h^m}\left(y_{\frac{m+1}{2}} + \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i \left[\binom{m}{i} - \binom{m}{i+1}\right] y_{\frac{m-1}{2}-i} - y_{-\frac{m+1}{2}}\right),$$

$jika\ m\ ganjil$

Sebagai contoh dari formulasi diatas, untuk aproksimasi $y^{(6)}(x_0)$ dibutuhkan persamaan berikut :

$y_0 = h^0 y(x_0)$

$y_1 - y_{-1} = 2hy^{(1)}(x_0)$

$y_1 - 2y_0 + y_{-1} = h^2 y^{(2)}(x_0)$

$y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2} = 2h^3 y^{(3)}(x_0)$

$y_2 - 4y_1 + 6y_0 - 4y_{-1} + y_{-2} = h^4 y^{(4)}(x_0)$

$y_3 - 4y_2 + 5y_1 - 5y_{-1} + 4y_{-2} - y_{-3} = 2h^5 y^{(5)}(x_0)$

$y_3 - 6y_2 + 15y_1 - 20y_0 + 15y_{-1} - 6y_{-2} + y_{-3} = h^6 y^{(6)}(x_0)$

Dalam bentuk umum untuk aproksimasi pada saat x_i adalah :

$y_i = h^0 y(x_i)$

$y_{i+1} - y_{i-1} = 2hy^{(1)}(x_i)$

$y_{i+1} - 2y_0 + y_{i-1} = h^2 y^{(2)}(x_i)$

$y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2} = 2h^3 y^{(3)}(i)$

$y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_0 - 4y_{i-1} + y_{i-2} = h^4 y^{(4)}(x_i)$

$y_{i+3} - 4y_{i+2} + 5y_{i+1} - 5y_{i-1} + 4y_{i-2} - y_{i-3} = 2h^5 y^{(5)}$

$y_{i+3} - 6y_{i+2} + 15y_{i+1} - 20y_0 + 15y_{i-1} - 6y_{i-2} + y_{i-3}$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan linier diatas untuk setiap langkah ke-*i*, maka solusi numerik dari persamaan diferensial biasa nonlinier orde ke-*n* akan dapat ditentukan .

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pendekatan yang sudah dipaparkan diatas akan ditunjukkan cara kerjanya melalui contoh berikut :

$y^{(v)} = 6\{2(y')^3 + 6yy'y'' + y^2 y'''\}$

Untuk $1 \leq x \leq 3$

Degan masalah nilai awal :

$y(1) = 1$, $y'(1) = -1$

$y''(1) = 2$, $y'''(1) = -6$

$y^{iv}(1) = 24$

Dengan solusi eksak yang diberikan dari persamaan diferensial diatas adalah :

$$y(x) = \frac{1}{x}$$

Pendekatan skema beda pusat Newton untuk kasus ini adalah :

$y_i = h^0 y(x_i)$

$y_{i+1} - y_{i-1} = 2hy^{(1)}(x_i)$

$y_{i+1} - 2y_0 + y_{i-1} = h^2 y^{(2)}(x_i)$

$y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2} = 2h^3 y^{(3)}(x_i)$

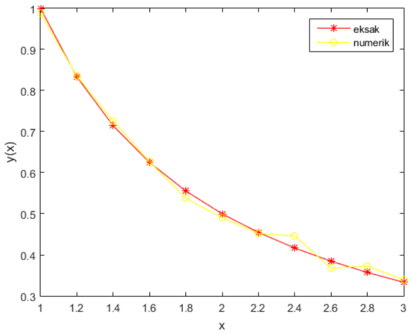
$y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_0 - 4y_{i-1} + y_{i-2} = h^4 y^{(4)}(x_i)$

$y_{i+3} - 4y_{i+2} + 5y_{i+1} - 5y_{i-1} + 4y_{i-2} - y_{i-3} = 2h^5 y^{(5)}$

Jika diambil lebar grid untuk $1 \leq x \leq 3$ adalah $h = 0.2$, maka hasil perhitungan numeriknya adalah :

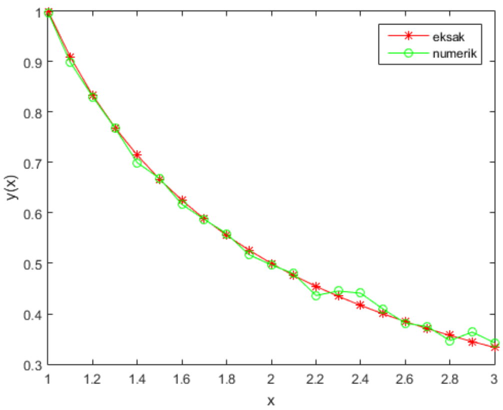
x	*Numerik*	*Eksak*	*Galat*
1.0	1	1	0
1.2	0.8400	0.8333	0.0067
1.4	0.7255	0.7143	0.0112
1.6	0.6273	0.6250	0.0023

1.8	0.5375	0.5556	0.0181
2.0	0.4906	0.5000	0.0094
2.2	0.4520	0.4545	0.0025
2.4	0.4462	0.4167	0.0295
2.6	0.3674	0.3846	0.0172
2.8	0.3728	0.3571	0.0157
3.0	0.3395	0.3333	0.0062



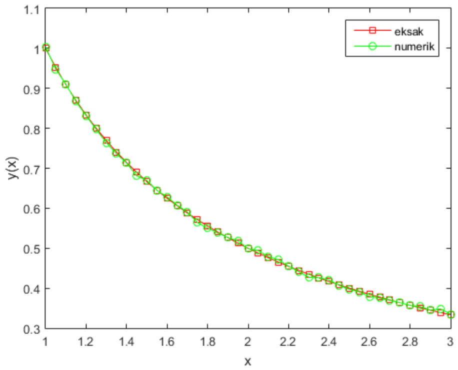
Gambar 1. Perbandingan solusi numerik dengan solusi eksak untuk *h=0.2*

Diperoleh persentase rata – rata kesalahan absolut (MAPE) adalah : 1.92% dan galat maksimum adalah : 6.61%
Untuk $h = 0.1$ akan ditunjukkan dalam grafik brikut :



Gambar 2. Perbandingan solusi numerik dengan solusi eksak untuk *h=0.1*

Diperoleh persentase rata – rata kesalahan absolut (MAPE) adalah : 1.11% dan galat maksimum adalah : 4.93%
Untuk $h = 0.5$ akan diberikan dalam grafik berikut :



Gambar 3. Perbandingan solusi numerik dengan solusi eksak untuk *h=0.05*

Diperoleh persentase rata – rata kesalahan absolut (MAPE) adalah : 0.73% dan galat maksimum adalah : 2.70%
Dari ketiga simulasi diatas terlihat bahwa semakin kecil lebar grid maka persentase kesalahan relatif semakin kecil atau aprokismasi semakin baik.

5.1. SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang dilakukan pada contoh kasus tersebut diatas, maka dapat ditarik kesimpulan.

1. Pendekatan metode beda pusat Newton dapat diaplikasikann untuk aproksimasi solusi eksak sebuah dengan baik.
2. Tingkat keakuratan metode beda pusat Newton sangat baik yaitu sebesar 1.92% rata – rata galat absolut untuk *h=0.2*, 1.11% rata – rata galat absolut untuk *h=0.1* dan 0.73% rata – rata galat absolut untuk *h=0.05.*
3. Semakin kecil lebar grid (*h*) maka hasil aproksimasi yang diperoleh semakin baik.

5.2. Saran

Karena contoh kasus yang diambil pada kajian ini masih sangat terbatas maka perlu dilakukan kajian untuk contoh kasus persamaan diferensial biasa linier orde tinggi tipe yang lain atau kajian mengenai kestabialn solusi numerik.

6. DAFTAR PUSTAKA

Bouchaip Rami, Abdelkhalak El hami (2018), *Advance Numerical Method with Matlab,Resolution of Nonlinera Differentian and Partial Differential equations*. John Wiley & Sons,Inc

Dennis G.Zill, Michael R. Cullen (2009), *Differential Equations with Boundary Problems ,Seventh Edition.* Brooks/Cole.

D.W.Jordan, P.Smith (2007), *Nonliner Ordinary Differential Equations an Introrduction for Scientific and Engineers , Fourth Edition.* Oxford University Press.

Hung Tanh Phan (200), *A New Numerical Aproch for Solving Higher Order Nonlinear Ordinary Differential equations*. University of Wollongong.

John C. Strikwerda (2004), *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equation,Second Edition.* Soceity for Industrial and Applied Mathematics. Philadelpia.

Maitree Podisuk, Chinda Chaichuay (2005), *Solving the Initial value Problems of Higher -Order Ordinary differential Equations by Polynomials.*KMITL Sci.J.Vol.5 N0.1.

Richard L.Burdens, J.Douglas Faires (2011),*Numerical Analysis, Ninth Edition*. Brook/Cole.