IMPLEMENTASI ENSEMBLE KALMAN FILTER PADA METODE RUNGE-KUTTA UNTUK PERBAIKAN SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Oleh:
Hery Andi Sitompul [1)]
Tambos A Sianturi [2)]
Universitas Darma Agung, Medan
Universitas HKBP Nommensen, Pematang Siantar [1,2)]
E-mail:
herystpl@gmail.com [1)]
tambos.sianturi73@gmail.com [2)]

ABSTRACT

Solving differential equations numerically means calculating the value of a function on a variable value using an estimation method or approach. The second order Runge-Kutta is one of a numerical method for solving ordinary differential equations. Each method of aproximation will always generate an error, where each method will generate a different error. Whereas the Ensemble Kalman Filter (EnKF) method or technique is a method that optimizes an estimate using assimilation of measurement data. This paper shows that the implementation of the EnKF technique in the second order Runge-Kutta method can correct errors quite well.

Key Word : Ordinary Differential Equation, Runge-Kutta,EnKF,Numeric

ABSTRAK

Penyelesaian persamaan diferensial secara numerik artinya menghitung nilai fungsi pada suatu nilai variabel – variabelnya dengan menggunakan metode estimasi atau pendekatan. Runge-Kutta orde 2 merupakan salah satu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa. Setiap metode pendekatan akan selalu menghasilkan galat, dimana setiap metode akan menghasilkan galat yang berbeda. Sedangkan metode atau teknik Ensemble Kalman Filter (EnKF) merupakan suatu metode yang mengoptimalkan suatu estimasi dengan menggunakan assimilasi data pengukuran. Dalam tulisan ini diperlihatkan bahwa implementasi teknik EnKF pada metode Runge-Kutta orde dua dapat mengoreksi galat dengan cukup baik.

Kata Kunci : **Persamaan Diferensial Biasa, Runge-Kutta, EnKF, Numerik**

1. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Persamaan diferensial biasa sudah sejak dahulu kala diketahui mempunyai peranan yang sangat besar dalam menyelesaikan berbagai persolan sehari – hari terutama di bidang rekayasa teknik, ekonomi dan dinamika populasi.

Berbagai masalah tersebut dapat dimodelkan dalam persamaan diferensial biasa, kemudian dicari solusinya. Solusi persamaan diferensial ini ada dua bagian yaitu solusi analitik dan solusi numerik. Solusi analitik adalah solusi eksak yang diperoleh dengan berbagai metode yang sudah ada, sedangkan solusi numerik adalah pendekatan atau estimasi yang dilakukan secara numerik terhadap solusi persamaan diferensial biasa. Hal ini dilakukan karena tidak semua persoalan persamaan diferensial dapat diselesaikan dengan cara analisis. Salah satu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa adalah metode Runge-Kutta.

Ensemble Kalman Filter merupakan suatu metode estimasi yang melakukan perbaikan hasil estimasi dengan assimilasi data pengukuran pada saat tertentu.

Dalam tulisan ini akan dilakukan percobaan apakah metode Ensemble Kalman Filter dapat memperbaiki hasil metode Runge-Kutta untuk mendekati solusi eksaknya.

1.2. Maksud dan Tujuan

Maksud dari tulisan ini adalah untuk melakukan pembahasan bagaimana menerapkan algoritma Ensemble Kalman Filter (EnKF) pada metode Runge-Kutta untuk perbaikan solusi persamaan diferensial biasa secara numerik. Sedangkan tujuan dari tulisan ini adalah :

1. Mendapatkan estimasi solusi numerik dengan metode Runge-Kutta dari persaman biasa .
2. Menerapkan metode Ensemble Kalman Filter pada metode Runge-Kutta untuk mendapatkan solusi numerik persamaan diferensial biasa.
3. Membandingkan kedua hasil tersebut diatas apakah ada perbaikan hasil atau tidak.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih, yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde. Jika persaman diferensial memuat satu variabel maka disebut persamaan diferensial biasa (PDB), jika memuat variabel lebih dari satu disebut persamaan diferensial parsial (PDP).

Contoh :

$\frac{dy}{dx} + 4xy = 2e^x$, adalah PDB orde satu.

$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 3y = sinx$, adalah PDB orde dua

$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - v = 0$, adalah PDP orde Satu.

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - v = 0$, adalah PDP orde satu.

Solusi analitik dari persamaan diferensial adalah sebuah fungsi eksplisit $y = f(x)$ yang memenuhi persamaan diferensial tersebut. Terdapat berbagai cara untuk mendapatkan solusi eksplisit tersebut, tergantung jenis dan orde persamaan tersebut.

Solusi numerik persamaan diferensial biasa adalah adalah suatu rangkaian numerik untuk mendekati solusi eksak jika tidak dapat ditentukan secara analitik. Terdapat berbagai metode numerik untuk menentukan solusi persamaan diferensial tersebut, seperti : metode Euler, Heun, Runge Kutta dan lain – lain.

2.2. Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta adalah alternatif lain dari metode deret Taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, dan sekaligus menghindarkan keperluan mencari
turunan yang lebih tinggi dengan jalan mengevaluasi fungsi $f(x, y)$ pada titik terpilih
dalam setiap selang langkah. Metode Runge-Kutta adalah metode persamaan diferensial biasa (PDB) yang paling popuper karena banyak dipakai dalam praktek.

Bentuk umum metode Runge-Kutta adalah :

$$y_{r+1} = y_r + a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + k_n$$

$a_1, a_2, \cdots a_n$ adalah suatu ketetapan sedemikian hingga galat minimum. Terdapat empat orde metode Rumge-Kutta, yaitu :

Metode Runge-Kutta (RK) orde satu :

$k_1 = hf(x_r, r_r)$

$y_{r+1} = y_r + a_1k_1$ metode ini tak lain adalah metode Euler.

Metode Runge-Kutta orde dua :

$k_1 = hf(x_r, y_r)$

$k_2 = hf(x_r + p_1h, y_r + q_1k_1)$

$y_{r+1} = y_r + (a_1k_1 + a_2k_2)$

Jika $a_1 = a_2 = {}^1\!/_2$ dan $p_1 = q_1 = 1$ metode ini adalah metode Heun, dan jika $a_1 = {}^1\!/_3, a_2 = {}^2\!/_3$ dan $p_1 = q_1 = {}^3\!/_4$ disebut metode Ralston.

Metode Runge-Kutta (RK) orde tiga :

$k_1 = hf(x_r, y_r)$

$k_2 = hf(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_1)$

$k_3 = hf(x_r + h, y_r - k_1 + 2k_2$

$y_{r+1} = y_r + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$

Metode Runge-Kutta orde empat :

$k_1 = hf(x_r, y_r)$

$k_2 = hf(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_1)$

$k_3 = hf(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_2)$

$k_4 = hf(x_r + h, y_r + k_3)$

$y_{r+1} = y_r + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

2.1. Kalman Filter dan EnKF

Kalman Filter merupakan metode pendekatan estimasi fungsi parameter dalam peramalan deret waktu (*time series*), berupa algoritma yang menggabungkan model dan pengukuran (observasi). Algoritma ini mengestimasi keadaan dari suatu proses dengan cara meminimumkan rataan dari galat (*Mean square Error*) secara rekursif dan efisien, sehingga sering disebut penduga rekursif. Data pegukuran terbaru menjadi

bagian penting dari algoritma ini, karena data terbaru ini akan mengoreksi hasil prediksi, sehingga hasil estimasi selalu mendekati kondisi sebenarnya. Sedangkan Ensemble Kalman Filter adalah kelanjutan dari Kalman Filter untuk masalah nonlinier,

yaitu merupakan pendekatan metode Monte Carlo pada algoritma Kalman Filter.

2.1.1.Kalman Filter

Misalkan $x_n \in \mathbb{R}$ adalah suatu proses stokastik dan asumsikan bahwa x_n memenuhi persamaan linier berikut :

$x_n = Ax_{n-1} + Bu_{n-1} + w_{n-1}, n \geq 1$ ….(1)

$z_n = Hx_n + v_n$…………………………(2)

Dimana :

A adalah matriks model linier

B adalah matriks kontrol masukan

u_n adalah variabel kontrol

w_n adalah gangguan pada sistem

x_n adalah variabel *state*

z_n adalah pengukuran atau observasi

v_n adalah gangguan pada pengukuran

n adalah indeks integer waktu

Dengan keadaan awal x_0 diberikan berdistribusi normal :

$x_0 \sim N(0, P_0^*)$ …………………………….(3)

Dimana P_0^* adalah matriks kovariansi untuk proses stokastik x_0 dan $w_n \sim N(0, Q_n), v_n \sim N(0, R_n)$ dimana Q_n adalah matriks kovariansi gangguan pada sistem, R_n adalah matriks kovariansi untuk gangguan pada pengukuran.

Misalkan x_n didefenisikan sebagai keadaan (*state*) pada waktu t_n dan x_{n+1} menyatakan keadaan pada saat t_{n+1}, dan misalkan $\hat{x}_{n+1}^-$ menyatakan estimasi prior dari proses *state* berdasarkan informasi yang diperoleh hingga waktu t_{n+1} , dan misalkan $\hat{x}_n$ menyatakan estimasi terbaik dari proses *state* (posterior) sistem yang telah difilter hingga waktu t_n, maka dapat dirumuskan bahwa :

$\hat{x}_{n+1}^- = E(x_{n+1}|z^*)$

$\hat{x}_n = E(x_n|z^*)$

Dimana z^* adalah hasil pengukuran hingga waktu t_n. Dengan demikian model posterior untuk satu tahap waktu kedepan dapat dicari dengan :

$\hat{x}_{n+1}^- = A\hat{x}_n + Bu_n$ ……………………..(4)

Dan matriks kovariansi dapat dihitung dengan persamaan berikut :

$P_{n+1}^- = AP_nA' + Q$

Dimana

$P_{n+1}^{-} = E[(\hat{x}_{n+1}^{-} - \hat{x}_n)(\hat{x}_{n+1}^{-} - \hat{x}_n)'|z^*]$

$P_n = E[(\hat{x}_n - x_n)(\hat{x}_n - x_n)'|z^*$

tahap pemfilteran adalah tahap dimana estimasi posterior dihitung, yang dapat ditentukan melalui persamaan berikut :

$\hat{x}_n = \hat{x}_n^{-} + K_n(z_n - H\hat{x}_n^{-})$

Dengan K_n adalah kalman Gain yang dapat dihitung dengan :

$K_n = P_n^{-}H'[HP_n^{-}H' + R_n]^{-1}$

…………...(5)

dan matriks kovariansi posterior dapat diperbaharui melalui persamaan berikut :

$P_n^{*} = (I - K_nH)P_n^{-}$

2.1.2. Ensemble Kalman Filter (EnKF)

Ensemble Kalman Filter (EnKF) dikembangkan dan diperkenalkan oleh Geir Evensen tahun 1994, untuk mengatasi masalah nonlinier pada model oceanografi dan menunjukkan bahwa EnKF adalah suatu metode yang menjanjikan.

Misalkan $x_n \in \mathbb{R}$ adalah suatu proses stokastik, dan diasumsikan bahwa x_n memenuhi persamaan nonlinier berikut :

$x_n = f(x_{n-1}) + w_n$

…………………….(6)

$z_n = Hx_n + v_n$

…………………………(7)

Gagasan dari ensemble adalah simulasi Monte Carlo pada model *state* (x_n), dimana satu kumpulan ensemble dibangkitkan untuk model *state* (x_n) kemudian setiap anggota ensemble dievaluasi melalui persamaan (6) untuk mendapatkan sekelompok ensemble baru yang disebut dengan prior yang selanjutnya dilakukan estimasi dengan proses Kalman Filter biasa. Hal yang sama juga dilakukan terhadap model observasi (7) dengan membangkitkan sekelompok melalui observasi sebenarnya, dengan ensemble ini proses updating/filter dilakukan dengan Kalman Filter.

Berikut ini adalah tahapan dalam proses Ensemble Kalman Filter (EnKF) :

- $X := [x_1, x_2, \dots, x_n]' \in \mathbb{R}^{N \times N_e}$ adalah matriks ensemble untuk *state*.
- $\overline{X} \coloneqq [\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n]' \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ adalah vektor rata – rata ensemble.
- $z \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ adalah vektor observasi
- $P_e := \frac{(X-\overline{X})(X-\overline{X})'}{N_e - 1}$ adalah matriks kovariansi ensemble.
- $Z \coloneqq z + \gamma \in \mathbb{R}^{m \times N_e}$adalah matriks observasi dengan gangguan.
- $\gamma : (\in_1, \in_2, \dots, \in_n)$ adalah vektor gangguan dimana setiap $\in_i \sim N(0, \sum_i^e)$
- $Re := \frac{\gamma\gamma'}{N_e - 1}$ adalah matriks observasi dengan gangguan.

3. METODE PENELITIAN

Akan diambil beberapa contoh kasus dalam tulisan ini untuk memperlihatakan bagaimana teknik Ensemble Kalman Filter (EnKF) pada metode Runge-Kutta (RK) dalam menyelesaikan persamaan diferensial secara numerik. Metode Runge-Kutta yang digunakan dalam tulisan ini adalah orde dua metode Ralston.

Berikut ini adalah langkah – langkah yang ditempuh untuk menyelesaikan kasus pada tulisan ini :

- Defenisikan fungsi persamaan diferensial dalam bentuk $y' = f(x, y)$. Dan nilai awal $y(x_0) = y_0$ dan ukuran langkah h.
- $x_{r+1} = x_r + h$.
- Hitung nilai dari $k_1 = hf(x_r, y_r)$
  $k_2 = hf(x_r + p_1 h, y_r + q_1 k_1)$
  $y_{r+1} = y_r + (a_1 k_1 + a_2 k_2)$dan

ulangi langkah ini hingga nilai akhir x_r yang ditentukan.

Selanjutnya pada tahap estimasi dengan EnKF dilakukan dengan mengikuti algoritma berikut :

Pada saat $n = 0$

- Masukkan ensemble variabel awal : $x_0 = X \sim N(\mu_0, \sum_0)$
- Langkah prediksi : bangkitkan gangguan pada model $w_n \sim N(0, \sum_n^w)$, prediksi satu tahap kedepan $\hat{x}_n^- = f(\hat{x}_{n-1}^-) + w_n$, $f(\hat{x}_{n-1}^-)$ disini adalah metode Runge-Kutta orde dua metode Ralston.
- Tahap *filter/updating* : bangkitkan gangguan pada observasi $\in_n \sim N(0, \sum_n^{\in})$, $z_n = H\hat{x}_n^- + \in_n$
- Tentukan Kalman Gain : $K_n = PeH[HPeH' + Re]^{-1}$
- Perbaharui *state* dengan pengukuran (assimilasi data/data solusi eksak) : $\hat{x}_n = \hat{x}_n^- + K_n(z_n - H\hat{x}_n^-)$.

Langkah berikutnya adalah membandingkan kedua metode te5rsebut dengan keadaan atau hasil yang sebenarnya dan mengambil kesimpulan. Seluruh perhitungan secara numerik dari metode diatas dilakukan dengan menggunakan pemograman Matlab.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Kasus pertama dalam tulisan ini adalah : Hasil penelitian Kehoe dan Butt tentang energi kinetik dari hydrogenisasi yang didukung oleh katalis Ni. Karena ekses yang besar dari hydrogen yang mengakibatkan temperature menjadi dibawah 200^0C dan reaksi ini dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial biasa orde satu :

$$-r = P_{H_2} k_0 K_0 T exp\left[\frac{(-Q - E_a)}{R_g T}\right] C_B \, {}^{mole}/_{g}$$

dimana :

R_g adalah konstanta gas 1,987 kal(mole.K)

$-Q - E_a$ adalah 2700 kal/mole

P_{H_2} adalah tekanan parsial hydrogen (torr)

k_0=4,22 mole/(g.cat.s.torr)

$K_0 = 2.63 \times 10^{-6} cm^3/(mole.K)$

T=temperature mutlak (K)

C_B adalah kepadatan zat benzene (mole/cm^3)

Dari hasil penelitian mereka pada sebuah tabung reaktor dengan mengasumsikan tipe keadaan berikut :

$$P_{H_2} = 137\ torr$$

$$\rho_\beta = 1{,}2\ gcat/cm^3$$

$\theta = 0{,}226s$ waktu kontak

$$T = 50^0 C$$

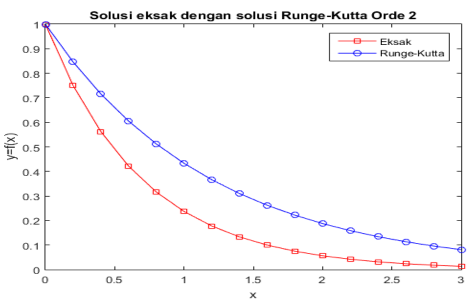
Dari hasil penelitian mereka diperoleh bahwa kecepatan konsentrasi zat benzene pada tabung reaktor adalah :

$$\frac{dy}{dx} = -1.44y$$

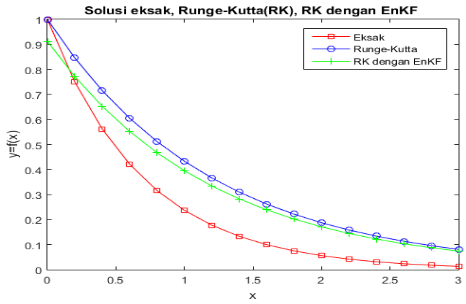
Dengan keadaan nilai awal $y = 1, x = 0$

Dengan x adalah posisi/tabung dan y konsentrasi benzena.

Kasus ini akan diestimasi secara numerik dengan metode Runge-Kutta orde dua dan Implementasi EnKF pada metode Runge-Kutta orde dua. Hasil dari proses tersebut disajikan dalam bentuk tabel dan grafik berikut :



Gambar 1. Grafik solusi eksak dibandingkan dengan solusi numerik Runge-Kutta orde 2.



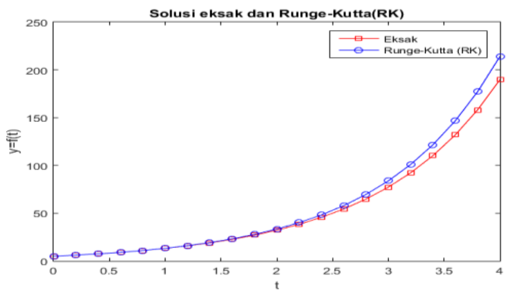
Gambar 2. Grafik solusi eksak dibandingkan dengan solusi numerik Runge-Kutta orde dua dan solusi numerik implementasi EnKF pada Runge Kutta.

Pengukuran	RK	RK-EnKF	
		h=0.2 n=50	*h=0.2 n=100*
MSE	0,.1304	0,1039	0,1082
% total galat	5,.272	4,200	4,.376

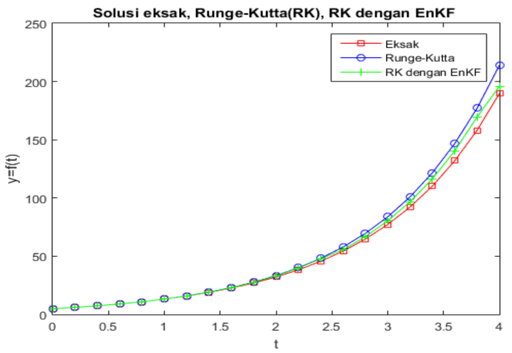
Tabel 1. Nilai pengukuran pada kedua solusi numerik kasus pertama.

Kasus kedua adalah : Solusi dari persamaan diferensial $y' = y - t^2$, dengan keadaan awal $y(0) = 5$ untuk $0 \leq t \leq 4$.

Hasil dari peneyelesaian dengan metode Runge-Kutta orde dua dan Implementasi EnKF pada metode Runge-Kutta orde dua kasus diatas disajikan dalam bentuk tabel dan grafik berikut :



Gambar 3. Grafik solusi eksak dibandingkan dengan solusi numerik Runge-Kutta orde 2 kasus kedua.



Gambar 4. Grafik solusi eksak dibandingkan dengan solusi numerik Runge-Kutta orde dua dan solusi numerik implementasi EnKF pada Runge Kutta.

Pengukuran	RK	RK-EnKF	
		h=0.2 *n=50*	*h=0.2* *n=100*
MSE	4,7839	2,2446	2,3323
% total galat	0,888	0,015	0,015

Tabel 2. Nilai pengukuran pada kedua solusi numerik kasus kedua.

Dari contoh kasus pertama dan kedua diatas dapat dilihat bahwa hasil plot grafik solusi numerik dari implementasi EnKF pada metode Runge-Kutta orde dua lebih dekat terhadap solusi eksak dibandingkan dengan solusi numerik metode Runge-Kutta saja. Dalam tabel satu dan dua juga dapat dilihat bahwa terdapat koreksi MSE (*Mean Square Error*) dan persentase galat (*error*) pada implementasi metode EnKF pada metode Runge kutta orde dua. Pada kasus pertama MSE Runge-Kutta sebesar 0,1304 dikoreksi menjadi 0,1082 dan persentase galat dari 5,272% menjadi 4,376%. Pada kasus kedua MSE Runge-Kutta 4,7839 dikoreksi menjadi 2,2446 dan persentase galat dari 0,888% menjadi 0,015%.

5. SIMPULAN DAN SARAN

5.1. Simpulan

Setelah melakukan uji coba implementasi metode Ensemble Kalman Filter (EnKF) pada Runge-Kutta orde dua pada dua kasus persamaan diferensial biasa maka dapat diambil beberapa kesimpulan yaitu :

1. Teknik Ensemble Kalman Filter (EnKF) dapat diimplementasikan pada metode Runge-Kutta orde dua dengan baik.
2. Solusi numerik hasil implementasi metode EnKF pada metode Runge-Kutta orde 2 memberikan hasil yang lebih dekat ke solusi eksak persamaan diferensial biasa.

5.2. Saran

Prinsip dari EnKF adalah membangkitkan secara acak sebuah ensemble yang digunakan untuk estimasi sehingga perlu menjalankan program berulang – ulang dengan mengganti jumlah ensemble sampai didapat hasil yang terbaik.

6. DAFTAR PUSTAKA

Boyce, WE., DiPrima, R.C.2004. *Elementary Differential Equations and Boundary*

Value Problems. Wiley: New York.

Geir Evensen (2003), *The Ensemble Kalman Filter : Theorical Formulation and Practical Implementation*. Ocean Dynamics Vol.53

Hery Andi Sitompul (2011), *Estimasi Parameter Reservoir Komposit dengan Teknik Ensemble Kalman Filter dan Algoritma Genetika*, Thesis ITB.

Kehoe, J. P. G., and J. B. Butt (1972), "*Interactions of Inter- and Intraphase Gradients in a Diffusion Limited Catalytic Reaction*," A.I.Ch.E. J., 18, 347.

Nuryadi, S.Pd.Si, M.Pd (2018), *Persamaan Diferensial Elementer,* PT.Gramasurya.

Yihua Yang (2020), *Ensemble Kalman Filtering with Perturbed Observation in Weather forcasting and Data Assimilation.* University of Reading.